Universidade do Sul de Santa Catarina

Cálculo I

Disciplina na modalidade a distância

5ª edição revista

Palhoça
UnisulVirtual
2008

Apresentação

Este livro didático corresponde à disciplina **Cálculo I**.

O material foi elaborado visando a uma aprendizagem autônoma, abordando conteúdos especialmente selecionados e adotando uma linguagem que facilite seu estudo a distância.

Por falar em distância, isto não significa que você estará sozinho. Não esqueça que sua caminhada nesta disciplina também será acompanhada constantemente pelo Sistema Tutorial da UnisulVirtual. Entre em contato sempre que sentir necessidade, seja por correio postal, fax, telefone, e-mail ou Ambiente Virtual de Aprendizagem - AVA. Nossa equipe terá o maior prazer em atendê-lo, pois sua aprendizagem é nosso principal objetivo.

Bom estudo e sucesso!

Equipe UnisulVirtual.

Créditos

Unisul - Universidade do Sul de Santa Catarina
UnisulVirtual - Educação Superior a Distância

Campus UnisulVirtual
Avenida dos Lagos, 41
Cidade Universitária Pedra Branca
Palhoça – SC - 88137-100
Fone/fax: (48) 3279-1242 e
3279-1271
E-mail: cursovirtual@unisul.br
Site: www.virtual.unisul.br

Reitor Unisul
Gerson Luiz Joner da Silveira

Vice-Reitor e Pró-Reitor Acadêmico
Sebastião Salésio Heerdt

Chefe de Gabinete da Reitoria
Fabian Martins de Castro

Pró-Reitor Administrativo
Marcus Vinícius Anátoles da Silva Ferreira

Campus Sul
Diretor: Valter Alves Schmitz Neto
Diretora adjunta: Alexandra Orsoni

Campus Norte
Diretor: Ailton Nazareno Soares
Diretora adjunta: Cibele Schuelter

Campus UnisulVirtual
Diretor: João Vianney
Diretora adjunta: Jucimara Roesler

Equipe UnisulVirtual

Avaliação Institucional
Dênia Falcão de Bittencourt

Biblioteca
Soraya Arruda Waltrick

Capacitação e Assessoria ao Docente
Angelita Marçal Flores (Coordenadora)
Caroline Batista
Elaine Surian
Enzo de Oliveira Moreira
Patrícia Meneghel
Simone Andréa de Castilho

Coordenação dos Cursos
Adriano Sérgio da Cunha
Aloísio José Rodrigues
Ana Luisa Mülbert
Ana Paula Reusing Pacheco
Bernardino José da Silva
Charles Cesconetto
Diva Marília Flemming
Eduardo Aquino Hübler
Fabiano Ceretta
Itamar Pedro Bevilaqua
Janete Elza Felisbino
Jucimara Roesler
Lauro José Ballock
Lívia da Cruz (auxiliar)
Luiz Guilherme Buchmann Figueiredo
Luiz Otávio Botelho Lento
Marcelo Cavalcanti
Maria da Graça Poyer
Maria de Fátima Martins (auxiliar)
Mauro Faccioni Filho
Michelle Denise Durieux Lopes Destri
Moacir Fogaça
Moacir Heerdt
Nélio Herzmann
Onei Tadeu Dutra
Patrícia Alberton
Rose Clér Estivalete Beche
Raulino Jacó Brüning
Rodrigo Nunes Lunardelli

Criação e Reconhecimento de Cursos
Diane Dal Mago
Vanderlei Brasil

Desenho Educacional
Daniela Erani Monteiro Will (Coordenadora)

Design Instrucional
Ana Cláudia Taú
Carmen Maria Cipriani Pandini
Carolina Hoeller da Silva Boeing
Flávia Lumi Matuzawa
Karla Leonora Dahse Nunes
Leandro Kingeski Pacheco
Luiz Henrique Queriquelli
Lívia da Cruz
Lucésia Pereira
Márcia Loch
Viviane Bastos
Viviani Poyer

Acessibilidade
Vanessa de Andrade Manoel

Avaliação da Aprendizagem
Márcia Loch (Coordenadora)
Cristina Klipp de Oliveira
Silvana Denise Guimarães

Design Visual
Cristiano Neri Gonçalves Ribeiro (Coordenador)
Adriana Ferreira dos Santos
Alex Sandro Xavier
Evandro Guedes Machado
Fernando Roberto Dias Zimmermann
Higor Ghisi Luciano
Pedro Paulo Alves Teixeira
Rafael Pessi
Vilson Martins Filho

Disciplinas a Distância
Enzo de Oliveira Moreira (Coordenador)

Gerência Acadêmica
Márcia Luz de Oliveira Bubalo

Gerência Administrativa
Renato André Luz (Gerente)
Valmir Venício Inácio

Gerência de Ensino, Pesquisa e Extensão
Ana Paula Reusing Pacheco

Gerência de Produção e Logística
Arthur Emmanuel F. Silveira (Gerente)
Francisco Asp

Logística de Encontros Presenciais
Graciele Marinês Lindenmayr (Coordenadora)
Aracelli Araldi
Cícero Alencar Branco
Daiana Cristina Bortolotti
Douglas Fabiani da Cruz
Fernando Steimbach
Letícia Cristina Barbosa
Priscila Santos Alves

Formatura e Eventos
Jackson Schuelter Wiggers

Logística de Materiais
Jeferson Cassiano Almeida da Costa (Coordenador)
José Carlos Teixeira
Eduardo Kraus

Monitoria e Suporte
Rafael da Cunha Lara (Coordenador)
Adriana Silveira
Andréia Drewes
Caroline Mendonça
Cláudia Noemi Nascimento
Cristiano Dalazen
Dyego Helbert Rachadel
Edison Rodrigo Valim
Francielle Arruda
Gabriela Malinverni Barbieri
Jonatas Collaço de Souza
Josiane Conceição Leal
Maria Eugênia Ferreira Celeghin
Maria Isabel Aragon
Priscilla Geovana Pagani
Rachel Lopes C. Pinto
Tatiane Silva
Vinícius Maykot Serafim

Relacionamento com o Mercado
Walter Félix Cardoso Júnior

Secretaria de Ensino a Distância
Karine Augusta Zanoni Albuquerque (Secretária de ensino)
Ana Paula Pereira
Andréa Luci Mandira
Andrei Rodrigues
Carla Cristina Sbardella
Deise Marcelo Antunes
Djeime Sammer Bortolotti
Franciele da Silva Bruchado
James Marcel Silva Ribeiro
Janaina Stuart da Costa
Jenniffer Camargo
Lamuniê Souza
Liana Pamplona
Luana Tarsila Hellmann
Marcelo José Soares
Marcos Alcides Medeiros Junior
Maria Isabel Aragon
Olavo Lajús
Priscilla Geovana Pagani
Rosângela Mara Siegel
Silvana Henrique Silva
Vanilda Liordina Heerdt
Vilmar Isaurino Vidal

Secretária Executiva
Viviane Schalata Martins

Tecnologia
Osmar de Oliveira Braz Júnior (Coordenador)
Jefferson Amorin Oliveira
Marcelo Neri da Silva
Pascoal Pinto Vernieri

Diva Marília Flemming
Elisa Flemming Luz
Christian Wagner

Cálculo I

Livro didático
5ª edição revista

Design instrucional
Daniela Erani Monteiro Will

Palhoça
UnisulVirtual
2008

Sumário

Anexo para destacar

Palavras dos professores

Ao entrar na Unisul você fez uma escolha muito importante para a sua formação profissional. A escolha de uma profissão é uma decisão que todo o cidadão tem o direito de fazer. Mas, você sabe, não é fácil!

Você se identificou com uma área do conhecimento que requer uma base teórica com alicerces sólidos, como os objetos da matemática.

É uma constante construção!

Participar diretamente desse processo como autores desse texto é uma responsabilidade que assumimos com muita garra e com muita certeza de que vamos apresentar um processo inovador de ensino do Cálculo Diferencial.

Dentre as diversas estratégias inovadoras no contexto da Educação Matemática, optamos pela inserção gradativa de objetos de estudos. Para facilitar a interação do texto criamos quatro personagens.

SiSoSi é um personagem que fará você lembrar da importância da lógica na formação dos conceitos e propriedades dos objetos matemáticos.

Phil é um filósofo matemático que resgata aspectos da histórica da matemática.

Rec vai ajudá-lo a descontrair um pouco. Brincando, ele vai resgatar a necessidade de redirecionar o olhar para aspectos metafóricos ou recreativos.

Teca é a representação do sexo feminino, apaixonada pela tecnologia, destaca e norteia o uso da calculadora e dos recursos computacionais.

Agradecemos a sua escolha, por várias razões. Primeiro, porque vamos ter a oportunidade de resgatar as belezas da matemática traduzidas por meio de modelos didáticos que representam situações do nosso dia-a-dia. Segundo, porque temos a certeza de que vamos todos crescer em prol da formação de profissionais éticos e críticos, comprometidos com um mundo melhor!

Vamos lá! A equipe do NEEM – Núcleo de Estudos em Educação Matemática está torcendo por você!

Os professores autores

Diva Marília Flemming

Elisa Flemming Luz

Christian Wagner

Plano de estudo

O plano de estudos visa a orientá-lo/a no desenvolvimento da Disciplina. Nele, você encontrará elementos que esclarecerão o contexto da Disciplina e sugerirão formas de organizar o seu tempo de estudos.

O processo de ensino e aprendizagem na UnisulVirtual leva em conta instrumentos que se articulam e se complementam. Assim, a construção de competências se dá sobre a articulação de metodologias e por meio das diversas formas de ação/mediação.

São elementos desse processo:

- livro didático;
- Espaço UnisulVirtual de Aprendizagem - EVA;
- as atividades de avaliação (complementares, a distância e presenciais).

Ementa da disciplina:

Limite e Continuidade. Derivadas. Aplicações das Derivadas. Diferencial.

Carga horária:

60 horas – 4 créditos

Objetivos

Geral

Dar ao universitário a oportunidade de construir competências e habilidades para: investigar, observar, analisar, delinear conclusões, testando-as na resolução de problemas.

Específicos:

- Analisar diferentes tipos de funções que modelam situações reais;
- Calcular e interpretar limites de funções reais;
- Calcular derivadas de diversos tipos de funções;
- Aplicar derivadas na análise do comportamento das funções elementares;
- Calcular e aplicar diferenciais;
- Discutir diferentes problemas que envolvem taxas de variação.

Conteúdo programático

Os objetivos de cada unidade definem o conjunto de conhecimentos que você deverá deter para o desenvolvimento de habilidades e competências necessárias à sua formação. Neste sentido, veja a seguir as unidades que compõem o Livro Didático desta Disciplina, bem como as respectivas cargas horárias.

Unidades de estudo: 4

Unidades	Carga horária	Conteúdo
1	12	Revisão: Conjuntos numéricos; Intervalos, inequações e valor absoluto; Funções; Funções polinomiais e racionais; Funções exponenciais e logarítmicas; Funções trigonométricas; Funções hiperbólicas.
2	12	Limites e continuidade: Noção intuitiva de limites; Definição de limites; Propriedade de limites e Teorema da Unicidade; Cálculo de limites e limites laterais; Limites no infinito e limites infinitos; Limites fundamentais; Continuidade de funções (Definição e propriedades).
3	16	Derivadas: Retas tangentes e taxas de variação; Derivada de uma função; Regras de derivação; Regra da cadeia; Derivada de funções elementares; Derivadas sucessivas; Derivação implícita; Diferencial.
4	16	Aplicação das derivadas: A derivada como taxa de variação; Taxas de variação relacionadas; Análise do comportamento de funções; Regras de L`Hospital.

Agenda de atividades/ Cronograma

- Verifique com atenção o EVA, organize-se para acessar periodicamente o espaço da Disciplina. O sucesso nos seus estudos depende da priorização do tempo para a leitura; da realização de análises e sínteses do conteúdo; e da interação com os seus colegas e tutor.

- Não perca os prazos das atividades. Registre no espaço a seguir as datas, com base no cronograma da disciplina disponibilizado no EVA.

- Use o quadro para agendar e programar as atividades relativas ao desenvolvimento da Disciplina.

Atividades	
Avaliação a Distância	
Avaliação Presencial	
Avaliação Final	
Demais atividades (registro pessoal)	

Orientações para estudar a distância

Você está realizando uma disciplina na modalidade de educação a distância. Nas aulas presenciais, é o professor e/ou a instituição quem define o cronograma das aulas. Na modalidade a distância é o estudante o principal responsável pela organização do seu tempo de estudo e de elaboração das atividades previstas. Esta característica da modalidade traz muitas vantagens, já que você poderá estudar no momento mais propício. Contudo, a modalidade também exige que você tenha disciplina e rigor nos estudos, já que não existem horários de aula regulares, assim como nas disciplinas presenciais da instituição.

Para lhe ajudar nessa caminhada, preparamos algumas orientações fundamentais.

Como obter êxito no estudo?

- Observe com atenção os objetivos de aprendizagem, apresentados no início de cada unidade. Eles são importantes indicadores para sua auto-avaliação. Ao fim da cada unidade, retorne aos objetivos e procure identificar se os atingiu.
- Leia e releia cada seção ou trecho que não tenha ficado bem entendido para você.
- Faça as atividades de auto-avaliação, que foram pensadas para reforçar a compreensão dos principais conceitos e temas abordados em cada unidade.

- Evite passar para a unidade seguinte sem compreender o conteúdo da unidade em questão, pois este livro didático foi concebido para você acompanhar seqüencialmente os conteúdos.

- Faça com suas palavras uma síntese de cada uma das unidades estudadas. Procure fazer esta atividade antes de ler a síntese elaborada pelo professor autor apresentada no livro didático. Compare a sua síntese com a do professor autor e verifique se você destacou os mesmos pontos que ele.

- Acesse regularmente o Espaço UnisulVirtual de Aprendizagem - EVA. Lá você encontra conteúdos e atividades complementares e obrigatórios, as últimas notícias da disciplina e pode interagir com o professor tutor e com seus colegas da disciplina.

- Procure o professor tutor sempre que sentir necessidade de ajuda, ele é o seu facilitador no processo de ensino e aprendizagem. Estará disponível para orientá-lo e dirimir as dúvidas que surgirem durante esta jornada de estudo.

- Procure também "conversar" com os seus colegas, via e-mail ou por meio do Espaço UnisulVirtual de Aprendizagem - EVA.

Um arco ou três colunas?

UNIDADE 1

Revisão

Objetivos de Aprendizagem

- Identificar e representar os principais conjuntos numéricos;
- Resolver problemas envolvendo valor absoluto e desigualdades;
- Identificar características e propriedades das funções;
- Visualizar e identificar funções em diferentes representações;
- Fazer leituras de representações gráficas.

Seções de Estudo

Para início de conversa

Nesta unidade você irá revisar objetos matemáticos no contexto dos números em geral, sua contextualização em termos de conjuntos, intervalos e resolução de desigualdades bem como no estudo das funções. Ao final da unidade, pense e reflita como a matemática é importante no seu caminhar em busca de uma profissão.

A idéia de número é algo que já nasce com o ser humano. A noção de quantidade já está presente na nossa formação individual.

Questões motivadoras

Você está na Europa e os termômetros marcam 100F (cem Farenheit), quanto isso é em °C?

Como modelar os fios de energia elétrica ou de telefone visualizados nos postes das ruas?

O que é uma função periódica?

Estas e outras perguntas você poderá responder ao final desta unidade.

Você sabia que no início dos tempos o homem ainda não tinha símbolos nem nomes para denotar os números?

O que se fazia era comparar conjuntos. É muito conhecida a velha lenda do pastor que, para saber se ao final do dia o número de cabras que ele colocava para pastar era o mesmo do início do dia, colocava uma pedra em um saco para representar cada cabra que entrava. No fim do dia retirava uma pedra para cada cabra e, se por acaso sobrasse alguma pedra, saberia que alguma cabra havia se perdido.

Obviamente isto não passa de uma lenda, mas mostra a importância dos números na evolução da humanidade. Em todas as grandes conquistas do homem, desde a Grécia antiga, Egito, Babilônia, até a conquista à lua, há matemática envolvida. E de acordo com a pequena estória contada, tudo começou com a noção de comparar conjuntos.

E é a partir da noção de números e dos conjuntos numéricos que é possível definir relações entre variáveis que assumem características de funções. A área de uma sala é função da medida do seu lado; a temperatura do ar é função de diversas variáveis, entre elas, da umidade relativa do ar; o espaço percorrido por um automóvel é função do tempo. Além destes, existem outros tantos exemplos de funções.

Mas o que é uma função e por que estudá-las no Cálculo I?

Nas próximas seções você estudará a definição dos conjuntos numéricos e algumas operações que são importantes para o entendimento das funções. Na seção 4 você verá o que é uma função e a partir desta definição, vai conhecer os principais tipos de funções utilizados no Cálculo I, sempre identificando aplicações pertinentes.

Vale destacar que esta unidade trata de uma revisão dos conteúdos já trabalhados no Ensino Médio. No entanto, é importante realizá-la com atenção pois são conceitos imprescindíveis para o estudo dos limites e das derivadas.

SEÇÃO 1

Conjuntos numéricos

Todo o estudo do cálculo diferencial desta disciplina está baseado no conjunto dos números reais. As funções são definidas e assumem valores nesse conjunto. Nesta seção você vai revisar seus conhecimentos sobre os conjuntos numéricos e suas principais propriedades e axiomas. Vamos lá?

Conjunto dos números naturais

Os primeiros números conhecidos da humanidade são os chamados *números naturais,* que possuem a seguinte representação:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Outra representação usual é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$. Neste caso o asterisco (*) simboliza a exclusão do zero.

Conjunto dos números inteiros

Imagine que você tem na sua conta de banco um saldo de R$ 100,00 e, por algum motivo, você teve que fazer uma retirada de R$ 105,00. Qual o seu saldo? No seu extrato aparecerá:

- *– R$ 5,00*

O que isto significa?
Um salto além do zero?
Como representar este tipo de número?

O conjunto dos números naturais já não serve mais para representar este tipo de operação. Assim, surge o conjunto dos números inteiros, formado por números inteiros positivos e negativos, representado por:

- $\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Conjunto dos números racionais

Já no tempo do Egito antigo começaram a surgir números que não eram inteiros. Geralmente os agrimensores usavam uma corda, como escala de medida. Assim, para medir o terreno verificavam quantas vezes a corda esticada cabia nos lados do terreno, mas muito raramente a medida era correta, ou seja, a corda não cabia um número inteiro de vezes nos lados e começaram a surgir as frações.

As frações são representadas na forma $\frac{m}{n}$, $n \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$ e formam o conjunto dos números racionais, denotado por:

- $Q = \left\{ x \mid x = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0 \right\}$

Na forma decimal, estes números formam uma dizima periódica ou finita, por exemplo:

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots \text{ ou } \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Em tempo
Não esqueça que todos os números inteiros também são racionais, por exemplo:

$$3 = \frac{3}{1}$$

Conjunto dos números irracionais

Existem números que não podem ser escritos na forma de $\frac{m}{n}$ com $n \neq 0$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Estes números formam o conjunto dos números irracionais e vamos denotá-lo pela letra $\bar{Q}$.

São exemplos de números irracionais:

$$\pi = 3{,}14159\ldots,\ e = 2{,}71\ldots,\ \sqrt{2} = 1{,}41\ldots$$

Você sabia que a busca pelas casas decimais do número π foi objeto de trabalho de muitos matemáticos? Os mesmos eram chamados de "caçadores de decimais".

Em 1844, já tínhamos 200 casas decimais. William Ruthenford conseguiu 440 casas decimais em um único cálculo, em 1872. Em 1874 William Shanks apresenta 707 decimais. Apenas em 1947 descobriu-se que os cálculos de Shanks estavam errados. Fergunson descobriu um erro na 528° decimal. Em 1949 a barreira dos mil foi vencida.

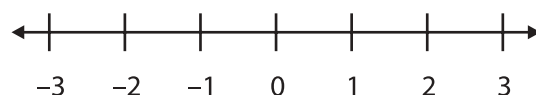
Os 10 mil decimais foram alcançados em 1958, 100 mil em 1961, o milhão em 1973, 10 milhões em 1983, 100 milhões em 1987 e o bilhão em 1989.

Texto adaptado do livro: GUEDJ, Denis; BRANDÃO, E. (trad.).
O Teorema do Papagaio. São Paulo: Companhia das Letras, 1999, 501p.

Conjunto dos números reais

A união do conjunto dos racionais com o conjunto dos irracionais formam o conjunto dos números reais.

$$\mathbb{R} = \mathrm{Q} \cup \bar{\mathrm{Q}}$$

Os números reais são descritos geometricamente por uma reta numerada, denotada por reta real.

Propriedades dos números reais

O conjunto dos números reais munido das operações de soma e multiplicação, tem as seguintes propriedades ou axiomas:

Sejam a, b e $c \in \mathbb{R}$, então são válidas as seguintes propriedades:

P1 (Associativa para soma)

$a + (b + c) = (a + b) + c$

P2 (Existência de elemento neutro para a soma)

$a + 0 = 0 + a = a$

P3 (Existência de inverso para soma)

$a + (-a) = (-a) + a = 0$

P4 (Comutativa para soma)

$a + b = b + a$

P5 (Associativa para multiplicação)

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

P6 (Existência de elemento neutro para multiplicação)

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

P7 (Existência de inverso multiplicativo)

$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1, \ a \neq 0$

P8 (Comutatividade para multiplicação)

$a \cdot b = b \cdot a$

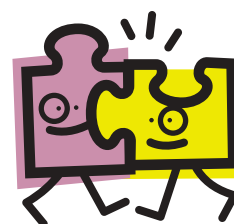
P9 (Distributividade)

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Vou ajudar você para demonstrar que se $a + x = a$, para qualquer número real a, então $x = 0$.

Se	$a + x = a$	
Então	$(-a) + (a + x) = (-a) + a = 0$	(P3)
Portanto	$((-a) + a) + x = 0$	(P1)
Portanto	$0 + x = 0$	(P3)
Assim	$x = 0$	(P2)

Exemplos

1) Para que você não fique apenas nas demonstrações, que tal um exemplo prático? Você lembra da questão inicial? Se você estiver na Europa e os termômetros estiverem marcando 100F, qual a temperatura equivalente em °C?

O que precisamos fazer, é tomar a temperatura em Fahrenheit, subtrair 32 e o resultado multiplicar por $\frac{5}{9}$. Algebricamente isto é escrito da seguinte forma:

$$T_c = \frac{5}{9}(T_f - 32)$$

sendo

T_c a temperatura em graus centígrados e T_f a temperatura em Farenheit.

Para resolver este exemplo é possível utilizar a fórmula de conversão acima.

$$T_c = \frac{5}{9}(100 - 32)$$

$$T_c = \frac{5}{9}(68)$$

$$T_c = \frac{340}{9} = 37{,}77°C$$

2) E se agora a pergunta for feita ao contrário? Qual a temperatura em Fahrenheit se os termômetros marcarem 20°C?

Usando a mesma fórmula de conversão é possível escrever:

$$20 = \frac{5}{9}(T_f - 32)$$
$$\frac{9}{5} \cdot 20 = (T_f - 32)$$
$$T_f = 32 + \frac{180}{5}$$
$$T_f = 32 + 36$$
$$T_f = 68F$$

Os termômetros marcariam 68 F.

Note que para resolver este exercício, utilizamos as propriedades dos números reais.

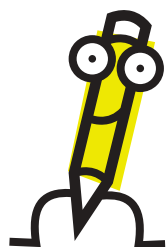
Agora é a sua vez!

1) Escreva se o número dado é inteiro, racional ou irracional.

(a) $\frac{2}{3}$ ______ (b) 0,35 ______

(c) $\sqrt{5}$ ______ (d) 0,03030303... ______

(e) $-\sqrt{25}$ ______ (f) 5,0000000

2) A temperatura normal do corpo humano é de 36°C. Qual a mesma temperatura em Fahrenheit?

SEÇÃO 2

Intervalos, inequações e valor absoluto

Nesta seção apresentamos a comparação de números reais, ou seja, a identificação de quando um número real é maior ou menor que outro. Para isso é necessário o uso de axiomas e propriedades. Na seção anterior comentamos sobre os números positivos e negativos e agora, usando desigualdades, será possível dizer que um número a é **positivo** se $a>0$ e a é **negativo** se $a<0$.

Intervalos

Se alguém disser para você que no próximo fim de semana as temperaturas mínima e máxima na região de Florianópolis serão de 20°C e 35°C, como você representaria isto matematicamente? Para este tipo de situação, usa-se o conceito de intervalos.

Definição: *Intervalos são subconjuntos infinitos de números reais.*

Veja a tabela a seguir na qual estão dispostos os nove tipos de intervalos:

Nome	Notação	Descrição de Conjunto	Representação Gráfica
Intervalo aberto	(a,b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b
Intervalo fechado	$[a,b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	a b
Intervalo semi-aberto ou semi-fechado	$[a,b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	a b
	$(a,b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	a b
Intervalos infinitos	(a,∞)	$\{x \mid x > a\}$	a
	$[a,\infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	a
	$(-\infty,b)$	$\{x \mid x < b\}$	b
	$(-\infty,b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	b
Números reais	$(-\infty,\infty)$	$\mathbb{R}$	

A comparação de números reais é feita através de quatro tipos de desigualdades, são elas:

$x < y$	x é menor que y	Exemplo: $2 < 3$
$x \leq y$	x é menor ou igual a y	Exemplo: $2 \leq 3$ ou $2 \leq 2$
$x > y$	x é maior que y	Exemplo: $3 > 2$
$x \geq y$	x é maior ou igual a y	Exemplo: $3 \geq 2$ ou $3 \geq 3$

Você percebeu que na notação de intervalos aparecem desigualdades duplas do tipo $a < x < b$? Isto é uma abreviação do fato de $a < x$ e $x < b$. O mesmo vale para $a \leq x \leq b$.

Voltando ao problema inicial da sub-seção de intervalos, perceba que se as temperaturas mínima e máxima são, respectivamente, 20°C e 35°C, então podem ser apresentadas de forma simplificada pelo intervalo [20,35], ou ainda, se T_c representa as possíveis temperaturas, então $20 \leq T_c \leq 35$. O sinal $\leq$ diz que as temperaturas também podem atingir os valores de 20°C e 35°C.

Em tempo

Se a desigualdade fosse apenas $20 < x < 35$, então as temperaturas só poderiam atingir valores entre 20°C e 35°C, excluindo os extremos do intervalo.

Agora é a sua vez!

1) Suponha que a variável x descreva o lucro que uma indústria espera obter no mês atual. O planejamento dos negócios requer um lucro de pelo menos 1 milhão de reais. Descreva o planejamento dos negócios em linguagem de intervalos.

2) Represente geometricamente os seguintes intervalos:

(a) $[-3,6]$

(b) $(4,+\infty)$

(c) $[0,5)$

3) Utilize intervalos para representar os números reais que satisfazem as seguintes desigualdades.

(a) $-1 < x \leq 7$

(b) $x > 5$

(c) $x \leq \pi$

Inequações

Considere a seguinte questão:

Se a temperatura em graus Celsius varia no intervalo [20,35], qual o intervalo de variação em Fahrenheit?

Para resolver este tipo de problema é preciso que você conheça as inequações e as propriedades relacionadas com as desigualdades.

Você já ouviu falar da **lei da tricotomia?** *Ela é muito simples!*

Ela afirma que se a é um número real, então uma das três afirmações é verdadeira: $a = 0$; a é positivo; $-a$ é positivo, ou com a notação de desigualdades: $a = 0$; $a > 0$; $a < 0$.

Propriedade das Desigualdades

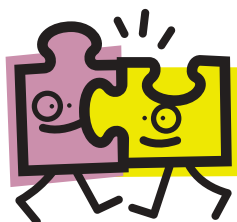
Sejam a, b, c e d números reais.

a) Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$;

b) Se $a < b$, então $a + c < b + c$ e $a - c < b - c$;

c) Se $a < b$, então $ac < bc$ se $c > 0$ e $ac > bc$ se $c < 0$;

d) Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$;

e) Se a e b são ambos positivos ou negativos e $a < b$, então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Exemplos

1) Veja a seguinte tabela, que exemplifica cada um dos itens da propriedade das desigualdades.

Desigualdade Inicial	Operação Realizada	Desigualdade final
$-4 < 2$ e $2 < 6$	Item (a)	$-4 < 6$
$-1 < 3$	Somar 4 em ambos os lados. Item (b)	$3 < 7$
$-1 < 3$	Subtrair 5 em ambos os lados. Item (b)	$-6 < -2$
$-1 < 3$	Multiplicar 2 em ambos os lados. Item (c)	$-2 < 6$
$-1 < 3$	Multiplicar -2 em ambos os lados. Item (c)	$2 > -6$
$2 < 6$	Item (e)	$\frac{1}{2} > \frac{1}{6}$
$-5 < -3$	Item (e)	$-\frac{1}{5} > -\frac{1}{3}$
$-4 < 2$ e $2 < 6$	Item (d)	$-2 < 8$

2) Considere o problema apresentado no início da subseção de inequações: se a temperatura em graus Celsius varia no intervalo $20 \leq T_c \leq 35$, qual o intervalo de variação em Fahrenheit?

Conforme você já visualizou, as temperaturas em Fahrenheit e graus Celsius estão relacionadas pela fórmula:

$$T_c = \frac{5}{9}(T_f - 32)$$

Portanto

$$20 \leq T_c \leq 35$$
$$20 \leq \frac{5}{9}(T_f - 32) \leq 35$$
$$20 \cdot \frac{9}{5} \leq \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9}(T_f - 32) \leq 35 \cdot \frac{9}{5} \qquad \text{(multiplicar } \frac{9}{5} \text{ em ambos os lados)}$$
$$36 \leq T_f - 32 \leq 63$$
$$36+32 \leq T_f - 32 + 32 \leq 63 + 32 \qquad \text{(adicionar 32)}$$
$$68 \leq T_f \leq 95$$

Assim as temperaturas em Fahrenheit pertencem ao intervalo fechado [68,95]. Usando a representação gráfica tem-se:

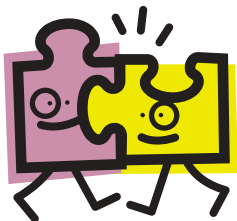
Veja algumas considerações sobre a fatoração de polinômios antes de visualizar outros exemplos.

Seja P(x) o seguinte polinômio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

sendo $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reais chamados de coeficientes e n é o grau do polinômio. Todo polinômio de grau n, tem exatamente n raízes, isto é, n valores no qual o polinômio P(x) se anula. Suponha que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sejam as raízes do polinômio. Portanto, o polinômio P(x) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$P(x) = a_n(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot \ldots \cdot(x - x_n)$$

Efetuou-se a fatoração do polinômio P(x) em termos de suas raízes. Esta fatoração auxilia (e muito) para o cálculo das inequações.

Exemplos

1) Resolver a inequação $x^2 + 3x - 10 > 0$.

Inicialmente pense como se estivesse diante de uma equação para obter as raízes do polinômio:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

Usando a fórmula de Báskhara, é possível obter as raízes: $x = 2$ e $x = -5$. Portanto, o polinômio pode ser escrito como:

$$x^2 + 3x - 10 = (x - 2)\cdot(x - (-5)) = (x - 2)\cdot(x + 5)$$

Em tempo
A fórmula de Báskhara auxilia na obtenção das duas raízes de uma equação do segundo grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Assim, a inequação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(x - 2)\cdot(x + 5) > 0$$

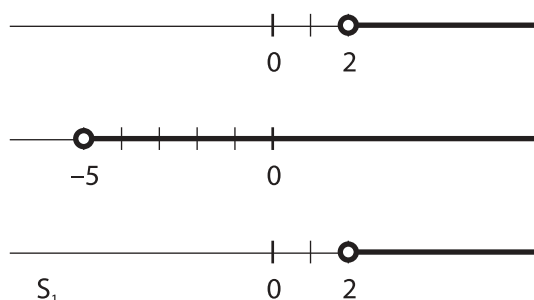
O produto dos dois fatores é positivo. Assim, podemos analisar dois casos:

1° Caso: os dois fatores são positivos;

2° Caso: os dois fatores são negativos.

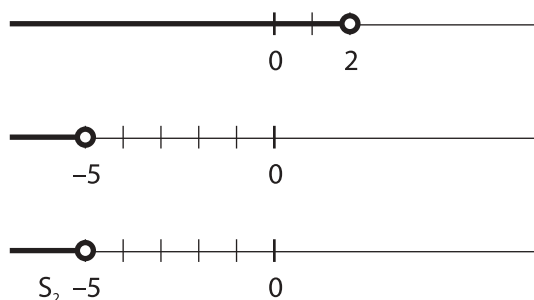
1° Caso: $(x - 2) > 0$ e $(x + 5) > 0$.

Resolvendo estas duas inequações tem-se $x > 2$ e $x > -5$.

Fazendo a representação geométrica das soluções,

Perceba que a intersecção é dada por $x > 2$, ou em intervalos $x \in (2,+\infty)$, assim a primeira solução é dada por $S_1 = (2,+\infty)$.

2° Caso: $(x - 2) < 0$ e $(x + 5) < 0$.

Resolvendo as inequações é possível dizer que $x < 2$ e $x < -5$.

A representação geométrica será dada por:

Novamente fazendo a intersecção, é possível concluir que $x < -5$, ou $x \in (-\infty,-5)$, assim a segunda solução é dada por $S_2 = (-\infty,-5)$.

Em tempo
É bom lembrar que a preposição "ou" indica a união entre as soluções.

A solução final da inequação $x^2 + 3x - 10 > 0$ é dada por $S_1 \cup S_2$:

$S = S_1 \cup S_2 = (-\infty,-5) \cup (2,+\infty)$

2) Resolver a inequação $\dfrac{4x-5}{x-3} < 2$.

$\dfrac{4x-5}{x-3} - 2 < 2 - 2$ (subtraindo 2 de ambos os lados)

$\dfrac{4x-5}{x-3} - 2 < 0$

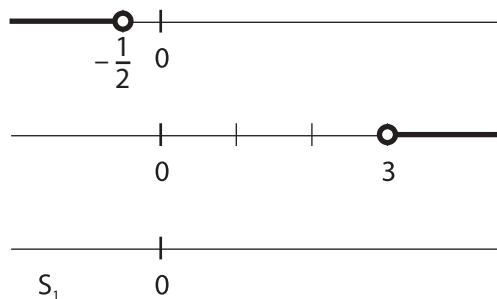
$\dfrac{4x-5-2(x-3)}{x-3} < 0$

$\dfrac{4x-5-2x+6}{x-3} < 0$

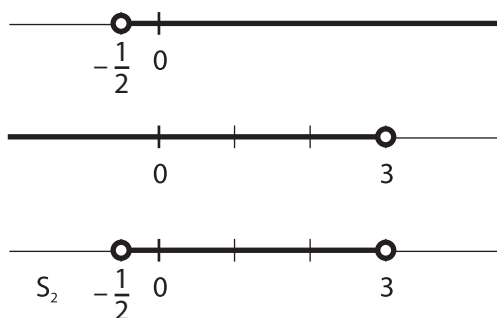
$\dfrac{2x+1}{x-3} < 0$

A divisão de dois termos será negativa, quando o numerador é positivo e o denominador é negativo, ou vice-versa.

1° Caso: $2x + 1 < 0$ e $x - 3 > 0$

Ou seja, $x < -\dfrac{1}{2}$ e $x > 3$, geometricamente tem-se:

Fazendo a intersecção, nota-se que é vazia, logo $S_1 = \varnothing$.

2° Caso: $2x + 1 > 0$ e $x - 3 < 0$

Ou seja, $x > -\frac{1}{2}$ e $x < 3$, que podem ser representadas geometricamente por:

A intersecção dos dois intervalos será a solução $-\frac{1}{2} < x < 3$, ou ainda, $x \in (-\frac{1}{2},3)$. Portanto, tem-se que $S_2 = (-\frac{1}{2},3)$.

Logo a solução final será dada pela união dos dois casos, ou seja,

$$S = \varnothing \cup \left(-\frac{1}{2},3\right) = \left(-\frac{1}{2},3\right)$$

3) Resolver a inequação $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$.

O polinômio apresentado possui três raízes, pois é de um polinômio de 3° grau. A primeira raiz é encontrada por inspeção e as outras pelo método de Briott-Rufini.

Nota-se rapidamente que $x = 1$ é uma raiz do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, pois

$$P(1) = 1^3 - 1^2 - 1 + 1 = 0$$

Portanto, uma parte da fatoração será:

$$P(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1) \cdot Q(x)$$

É necessário descobrir o fator $Q(x)$.

Veja abaixo o método de resolução por Briott-Rufini:

Passos	Resultados
Escreva todos os coeficientes de $P(x)$ e a raiz encontrada como mostra ao lado.	$\begin{array}{c\|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline & & & & \end{array}$
Na segunda linha, repita o primeiro coeficiente de $P(x)$, observando a colocação em coluna.	$\begin{array}{c\|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & & & \end{array}$
Multiplique esse coeficiente pelo valor da raiz (neste caso: 1) somando com o próximo coeficiente e posicionando o resultado abaixo dele ($1 \times 1 + (-1) = 0$).	$\begin{array}{c\|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$ (+, ×)
Repetir o procedimento até o último coeficiente de $P(x)$.	$\begin{array}{c\|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \end{array}$ $\begin{array}{c\|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$

A linha resultante mostra os coeficientes do termo $Q(x)$. O grau de $Q(x)$, é uma unidade a menos que o de $P(x)$. Assim $Q(x) = x^2 + 0x - 1 = x^2 - 1$.

Portanto,

$$P(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)\cdot(x^2 - 1)$$

Agora o termo de segundo grau se anula em $x = 1$ e $x = -1$. Assim as três raízes são: $x = 1$, $x = 1$ e $x = -1$, sendo possível fatorar a inequação $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$ da seguinte forma:

$$(x - 1)\cdot(x - 1)\cdot(x + 1) > 0, \qquad \text{ou ainda,}$$
$$(x - 1)^2\cdot(x + 1) > 0$$

Como $(x - 1)^2$ é sempre positivo, segue que para satisfazer a inequação, devemos ter $x + 1 > 0$, assim tem-se:

$$x + 1 > 0$$
$$x > -1$$

Se $(x - 1)^2 > 0$, então

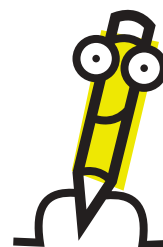
$$x - 1 \neq 0$$
$$x \neq 1$$

Assim, a solução final é dada por $x > -1$ ou $x \neq 1$, ou seja, $S = (-1,1) \cup (1,+\infty)$.

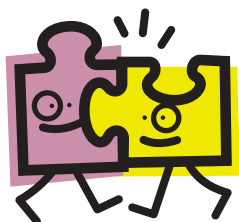
Agora é a sua vez!

1) Resolva a inequação $3 - 6x \leq 2x + 8$.

2) Encontre a solução da inequação $\frac{3x+1}{x-3} < 1$.

3) Qual a solução da inequação $x^2 + x - 2 \geq 0$?

Valor Absoluto

Imagine que você esteja na reta real, em cima do ponto –3, e precisa determinar qual a distância de –3 até 0? Rapidamente responde-se que a distância é 3. Essa idéia de distância recebe o nome de valor absoluto.

> ***Definição:*** *O valor absoluto de a, denotado por | a |, é definido como:*
>
> $$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Exemplos

1) Resolver a equação modular $|2x - 5| = 3$.

De acordo com a definição tem-se que

> $2x - 5 = 3$ ou
> $2x - 5 = -3$

Resolvendo ambas as equações, obtém-se que $x = 4$ e $x = 1$.

2) Resolver a equação modular $|4x + 3| = |2x - 5|$.

Dois números de mesmo valor absoluto ou são iguais $4x + 3 = 2x - 5$ ou diferem pelo sinal $4x + 3 = -(2x - 5)$.

1° Caso: $4x + 3 = 2x - 5$

> $4x - 2x = -5 - 3$ (subtraindo $2x$ e 3 de ambos os lados)
>
> $2x = -8$
>
> $x = -4$

2° Caso: $4x + 3 = -(2x - 5)$

$4x + 3 = -2x + 5$

$4x + 2x = 5 - 3$

$6x = 2$

$x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Assim, a equação dada tem soluções $x = -4$ e $x = \frac{1}{3}$.

3) Resolver $|2x + 6| = -9$

Esta equação não tem solução, pois o valor absoluto de um número nunca pode ser negativo.

Observação: *O valor absoluto ou módulo de um número a pode ser interpretado como a distância de a até 0 (zero) e escrevemos* $|a| = \sqrt{a^2}$.

Por exemplo dizemos que a distância de -3 *até 0 é* $|-3| = 3$, *ou* $|-3| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

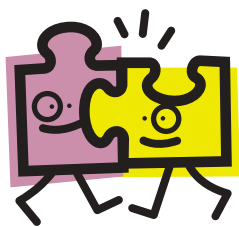
Propriedades do valor absoluto

Sejam a, b e x números reais.

a) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$, onde $a > 0$.
b) $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$, onde $a > 0$.
c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ e $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.
d) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdade Triangular).

Que tal provar que $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$?

Da interpretação geométrica de valor absoluto, segue que:

$|a.b| = \sqrt{(a.b)^2} = \sqrt{a^2.b^2} = \sqrt{a^2}.\sqrt{b^2} = |a|.|b|$

Exemplos

1) A propriedade (d) que fala da desigualdade triangular merece um exemplo para melhor entendê-la.

Seja $a = -1$ e $b = 1$, então

$|a + b| = |-1 + 1| = 0$ e

$|a| + |b| = |-1| + |1| = 1 + 1 = 2,$ logo,

$|a + b| < |a| + |b|$

Já se $a = -1$ e $b = 0$, temos neste caso que $|a + b| = |a| + |b|$, ou seja, o valor absoluto de uma soma é sempre menor ou igual à soma dos valores absolutos.

2) Resolver a desigualdade modular $|3x + 2| \geq 7$.

Aplicando a proposição (b), tem-se:

$3x + 2 \geq 7$ ou

$3x + 2 \leq -7$

1° Caso: $3x + 2 \geq 7$

$3x + 2 \geq 7$ (subtraí-se 2 de ambos os lados)

$3x \geq 5$ (multiplica-se ambos os lados por $\frac{1}{3}$)

$x \geq \frac{5}{3}$

2° Caso: $3x + 2 \leq -7$

$3x \leq -9$

$x \leq -3$

A solução é expressa pela união dos dois casos, como já vimos nos exemplos das inequações.

$$S = (-\infty, -3] \cup \left[\frac{5}{3}, \infty\right)$$

3) Determinar os valores de x tais que $| 2x - 5 | < 2$.

Pela proposição (a) tem-se:

$-2 < 2x - 5 < 2$ (soma-se 5 em ambos os lados da desigualdade)

$-2 + 5 < 2x < 2 + 5$

$3 < 2x < 7$ (multiplica-se ambos os lados por $\frac{1}{2}$)

$\frac{3}{2} < x < \frac{7}{2}$

$S = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

4) Resolver a inequação modular $\left|\frac{2+x}{3-x}\right| > 4$.

Note inicialmente que $x \neq 3$, pois caso contrário o denominador seria anulado.

Usando a propriedade (c):

$\left|\frac{2+x}{3-x}\right| > 4$

$|2+x| > 4|x-3|$

Elevando ambos os lados ao quadrado, vem:

$4 + 4x + x^2 - 16x^2 + 96x - 144 > 0$

$-15x^2 + 100x - 140 > 0$ (multiplica-se ambos os lados por $-\frac{1}{5}$)

$3x^2 - 20x + 28 < 0$

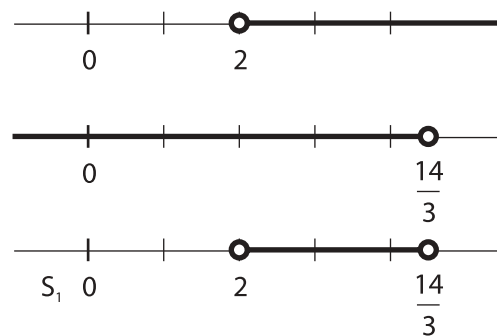
Fatorando o termo em segundo grau, tem-se:

$$3(x-2)(x-\frac{14}{3})<0$$

1° Caso: $(x - 2) > 0$ e $(x-\frac{14}{3})<0$.

Resolvendo as inequações obtém-se:

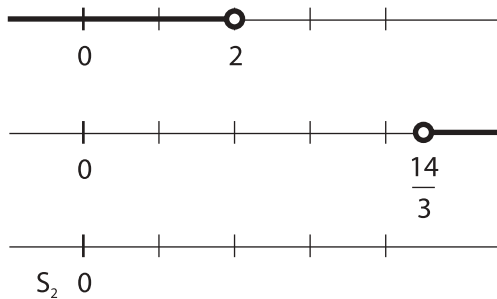
$$x > 2 \text{ e } x<\frac{14}{3}$$

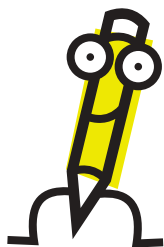
Veja a representação geométrica da intersecção dos dois intervalos:

A solução S_1 será $2<x<\frac{14}{3}$ ou $S_1=\left(2,\frac{14}{3}\right)$.

2° Caso: $x - 2 < 0$ e $x-\frac{14}{3}>0$

Resolvendo as inequações obtém-se:

$$x < 2 \text{ e } x>\frac{14}{3}$$

Veja a representação geométrica da intersecção dos dois intervalos:

Como a intersecção é vazia tem-se $S_2 = \varnothing$.

Fazendo a união dos dois casos, tem-se que $S_1 \cup S_2 = \left(2, \frac{14}{3}\right)$. Mas ainda é preciso considerar a condição inicial de que $x \neq 3$. Assim a solução será dada por $S = \left(2, \frac{14}{3}\right) - \{3\}$.

Agora é a sua vez!

1) Resolva a equação $|x - 3| = |3x + 4|$.

2) Resolva $|3x - 4| < 3$.

SEÇÃO 3

Funções

Após você ter revisado os conjuntos numéricos e noções gerais sobre intervalos, inequações e valor absoluto, chegou o momento de trabalhar com as funções.

As funções aparecem em muitas situações reais, em que o valor de uma variável pode depender do valor de uma outra variável. Por exemplo:

- a procura por um tipo de carne (frango, gado etc.) pode depender do preço atual no mercado;
- a poluição do ar depende do número de carros na rua;
- a área de um quadrado depende da medida de seus lados.

Para modelar essas situações, são utilizadas funções do tipo

$$y = f(x)$$

sendo x a variável independente e y a variável dependente.

Para definir uma função é necessário dois conjuntos e uma relação específica entre eles. A Figura 1.1 mostra diagramas que representam os dois conjuntos e a relação em três diferentes situações. Observe que:

- todos os elementos do conjunto A têm um único correspondente no conjunto B;
- no conjunto D você pode ter elementos que são correspondentes de mais de um elemento no conjunto C;
- no conjunto F você pode ter elementos que não são utilizados na relação entre os dois conjuntos.

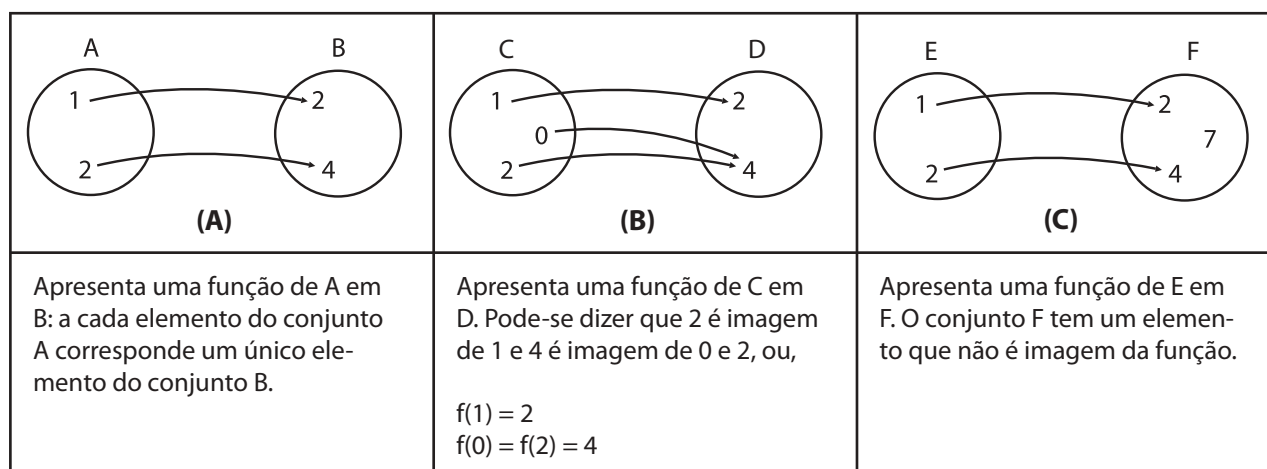



Figura 1.1 Diagrama com funções

Definição de função

Formalmente pode-se definir função da seguinte forma:

> *Sejam A e B subconjuntos do conjunto dos números reais. Uma função $f : A \to B$ é uma lei ou regra que a* ***cada*** *elemento de A faz corresponder um* ***único*** *elemento de B.*

Linguagem Simbólica:

$$f : A \to B \qquad \text{ou} \qquad A \xrightarrow{f} B$$
$$x \mapsto f(x) \qquad\qquad x \mapsto y = f(x)$$

Pode-se dizer que uma função definida no conjunto dos reais é uma relação específica, pois estamos diante de um subconjunto do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Assim, a representação gráfica de uma função $y = f(x)$ é o conjunto dos pares ordenados $(x,f(x))$, e para cada valor de x existe um único correspondente y.

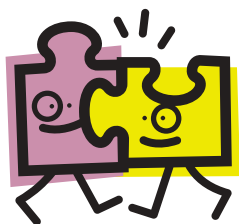
É usual identificar:

- Domínio de uma função: conjunto em que a função é definida (conjunto A).
- Contra-domínio de uma função: conjunto em que a função toma valores (conjunto B).
- Conjunto Imagem de uma função ou simplesmente Imagem da função: conjunto dos valores $f(x)$.

Na linguagem mais coloquial é usual confundir as notações f com $f(x)$: f é a função $f : A \to B$, enquanto que $f(x)$ é o valor que a função assume em x. Costuma-se falar que **$f(x)$ é a imagem de x**.

Você sabia que o matemático Euler é o autor da notação f(x)?

Euler foi um escritor prolífico da história da matemática. Sua produtividade surpreendente não foi prejudicada quando ficou cego. Publicou 530 trabalhos durante sua vida e muitos manuscritos publicados após a sua morte. É muito grande a sua contribuição para a matemática. Destaca-se aqui, a sua autoria por notações matemáticas que permanecem imutáveis através dos séculos.

Por exemplo, a notação de funções y = f(x).

Exemplos

1) Vamos considerar as funções apresentadas na Figura 1.1. Observe:

(a)	(b)	(c)
$f: A \to B$ $D(f) = \{1,2\}$ $CD(f) = \{2,4\}$ $Im(f) = \{2,4\}$	$f: C \to D$ $D(f) = \{0,1,2\}$ $CD(f) = \{2,4\}$ $Im(f) = \{2,4\}$	$f: E \to F$ $D(f) = \{1,2\}$ $CD(f) = \{2,4,7\}$ $Im(f) = \{2,4\}$

Em tempo

As notações usadas no contexto de funções podem variar de um texto (autor) para outro, pois não se tem uma notação única.

Em geral os conjuntos A e B são subconjuntos do conjunto dos números reais. Neste caso, as funções são ditas reais com variáveis reais e a representação usual é a representação algébrica da lei de formação que define a relação entre os conjuntos.

2) Quando se discute funções, pode-se utilizar várias representações. Para exemplificar, veja as diferentes representações de uma função $y = f(x)$.

Linguagem natural

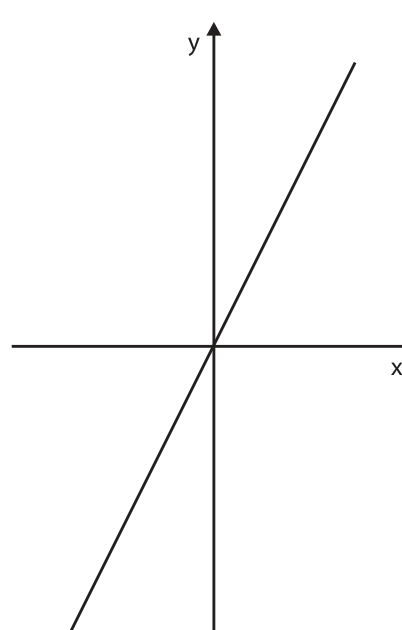
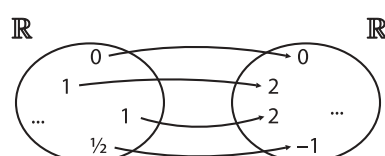
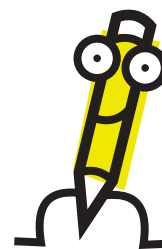
"Função que associa a cada número real o seu dobro"

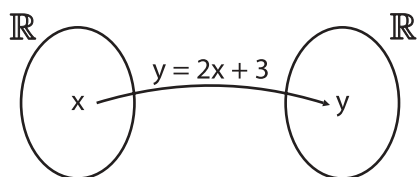
Linguagem algébrica

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$ ou $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = 2x$

Linguagem de tabela

x	y
−1	−2
−½	−1
0	0
1	2
2	4
...	...

Linguagem gráfica

Linguagem de diagrama

Agora é a sua vez!

1) Seja a função, definida da seguinte forma:

(a) Determine o domínio, o contra-domínio e o conjunto imagem da função f.

(b) Calcule f(3).

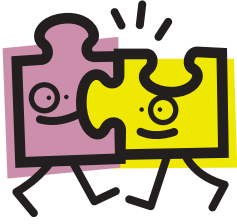
(c) Calcule f(–1).

Função Inversa

Ao definirmos uma função $y = f(x)$ na forma $f : A \to B$, ressaltamos que se trata de uma lei ou regra que a cada elemento de A se faz corresponder um único elemento de B.

Em algumas funções para cada $y \in B$ existe exatamente um valor $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Nestes casos, define-se uma função $g : B \to A$ na forma $x = g(y)$.

A função g é dita inversa de f, e é denotada por f^{-1}.

Nem todas as funções possuem inversa. As funções do segundo grau, por exemplo, não possuem inversa a não ser que seja feita uma restrição conveniente no seu domínio e contra-domínio.

Exemplos

1) Determinar a função inversa de $f(x) = 2x - 1$.

Para determinar a representação algébrica da função inversa de $f(x)$, trocamos o x pelo y na função dada. Assim tem-se:

$$x = 2y - 1$$

Isolando a variável y determinamos a função inversa:

$$x + 1 = 2y$$

$$y = \frac{x+1}{2}$$

Portanto, $f^{-1} = \frac{x+1}{2}$

2) Verificar a existência da função inversa de $y = x^2 - 4x + 3$. Fazer sua representação gráfica, caso exista.

Veja a representação gráfica da função $y = x^2 - 4x + 3$:

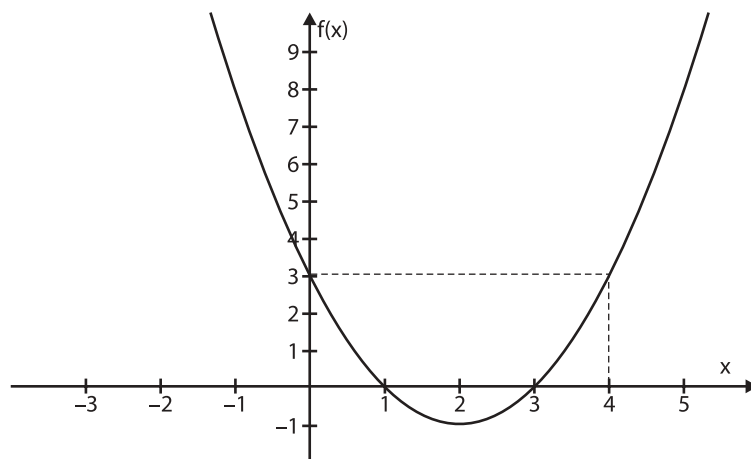



Figura 1.2 Gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$.

Na função do segundo grau é necessário realizar uma restrição no domínio pois para cada $y \in B$ pode existir mais de um $x \in A$ correspondente. Veja no gráfico que quando $y = 3 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$.

Portanto, a função inversa só poderá ser identificada caso haja uma restrição no domínio da função. Suponha que a função passe a ser definida como

$f : [2,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Veja na Figura 1.3 o gráfico da função.

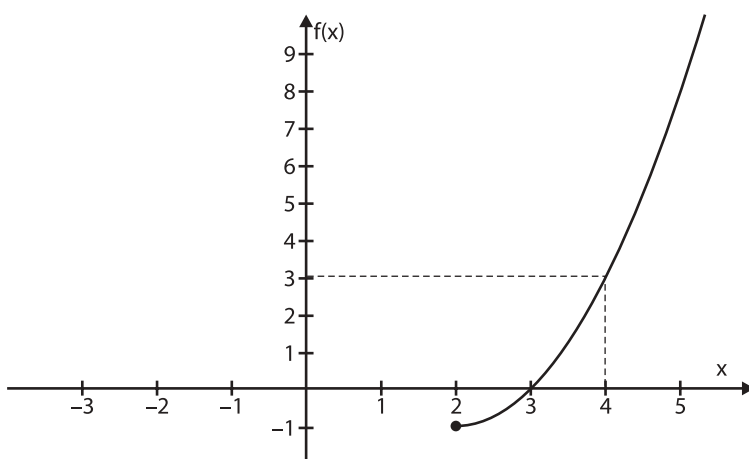



Figura 1.3 Gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$ definida de $[2,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Graficamente, a função inversa é simétrica em relação à reta $y = x$ à função $y = x^2 - 4x + 3$ definida de $[2,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Veja a representação gráfica das duas funções na Figura 1.4.

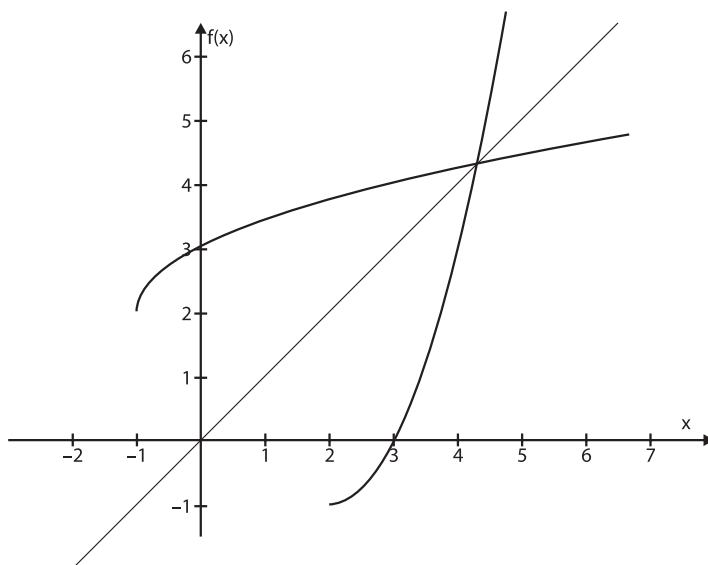



Figura 1.4 Função $f : [2,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $y = x^2 - 4x + 3$ e sua inversa.

É importante reconhecer as diversas linguagens utilizadas na representação de uma função. Em especial, nas representações gráficas é possível visualizar propriedades e características das funções sem a necessidade de desenvolvimentos algébricos mais elaborados.

Nas próximas seções iniciamos o estudo de alguns tipos de funções: polinomiais e racionais, exponencias e logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas. Para cada função, discutimos suas principais propriedades e características.

SEÇÃO 4

Funções polinomiais e racionais

As funções polinomiais são definidas na forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Os números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais, no caso das funções reais e são denominados coeficientes.

O domínio das funções polinomiais é sempre o conjunto dos números reais e o grau do polinômio representa o grau da função. Portanto, é possível dizer que:

- $y = f(x) = a_1 x + a_0,\ a_1 \neq 0$
  é uma função polinomial do primeiro grau;
- $y = f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ a_2 \neq 0$
  é uma função polinomial do segundo grau;
- $y = f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ a_3 \neq 0$
  é uma função polinomial do terceiro grau.

Você vai estudar mais detalhadamente nesta seção, em especial, as propriedades e características das funções polinomiais do primeiro e segundo graus. O estudo das características das funções polinomiais de grau maior do que dois será retomado na unidade sobre aplicações das derivadas.

Função polinomial do primeiro grau

Chama-se função do primeiro grau a função que associa cada número real x, o número real $ax + b$.

Linguagem Simbólica:

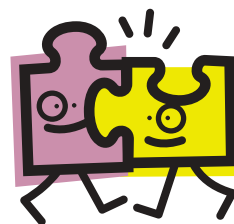
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = ax + b \text{ sendo } a, b \in \mathbb{R} \text{ com } a \neq 0$$

Os números reais a e b são chamados de **coeficiente angular** e **coeficiente linear**, respectivamente.

O coeficiente angular determina a inclinação da reta e o coeficiente linear indica o ponto que a reta corta o eixo y.

De acordo com os valores assumidos por a e b, temos as situações apresentadas na tabela a seguir:

Condições para os coeficientes	Representação algébrica	Nome da função
$b \neq 0$	$f(x) = ax + b$	Função Afim
$b = 0$	$f(x) = ax$	Função Linear
$b = 0$ e $a = 1$	$f(x) = x$	Função Identidade

A representação gráfica da função do primeiro grau é dada por uma reta. O domínio e o conjunto imagem são os reais.

Exemplos

1) Classificar as funções do primeiro grau de acordo com os valores assumidos pelos coeficientes angular e linear.

(a) $y = 2x + 3$	Função Afim
(b) $y = \frac{2}{3}x$	Função Linear
(c) $f(x) = -0{,}8x$	Função Linear
(d) $v(t) = 10 + 5t$	Função Afim
(e) $y = x$	Função Identidade

> ***Observação:*** *Note que a função polinomial do primeiro grau chamada de função identidade é única, ou seja, existe apenas um caso em que $b = 0$ e $a = 1$ que é $y = x$.*

2) Construir o gráfico da função $y = x + 1$.

Inicialmente, vamos construir uma tabela, atribuindo valores para x e determinando os valores correspondentes de y:

x	y = x + 1	y
– 2	y = –2 + 1	– 1
– 1	y = –1 + 1	0
0	y = 0 + 1	1
1	y = 1 + 1	2
2	y = 2 + 1	3

A cada par ordenado (x, y) corresponde um ponto no plano cartesiano. Veja abaixo que a união dos diversos pontos representa a reta.

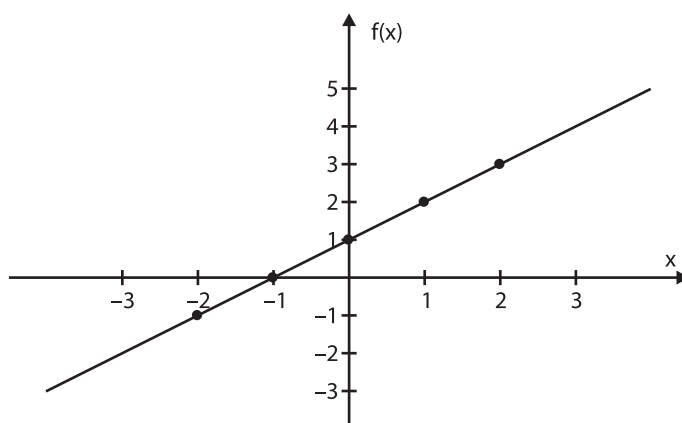



Figura 1.5 Gráfico de $y = x + 1$.

Observe o gráfico para identificar o coeficiente linear $b = 1$. Para visualizar o coeficiente angular, basta identificar a *tg* α, que pode ser calculada a partir de pontos da reta. Veja na Figura 1.6.

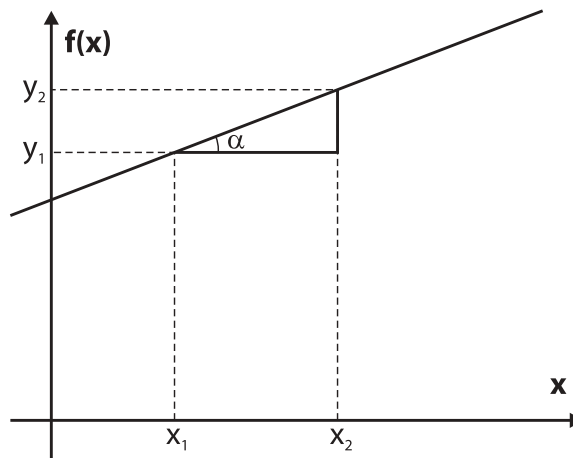



Figura 1.6 Gráfico de uma reta identificando a tg α.

É possível escrever:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Já observou que uma reta pode ser definida por apenas dois pontos?

Assim, basta que sejam determinados dois pontos para construir o gráfico de uma função do primeiro grau. Veja no próximo exemplo como você

Traçando gráficos usando o computador.

Existem vários softwares matemáticos que auxiliam no traçado de gráficos de funções. As figuras apresentadas neste material foram feitas no software **GRAPH 2.6** que está disponível para download em *http://www.padowan.dk/graph/*, acesso em 01 abr. 2004.

Mas você pode também utilizar o Derive ou outro software para fazer estes gráficos. Vale a pena tentar! Experimente!

pode encontrar a representação algébrica de uma função do primeiro grau a partir de dois pontos.

3) É possível conhecer a lei de formação de uma função do primeiro grau a partir de dois pontos da reta?

A representação no plano cartesiano de função do 1º grau é sempre uma reta. Da geometria sabe-se que por dois pontos passam uma única reta, portanto, a partir de dois pontos é possível definir a lei de formação da função. Para constatar suponha que você tenha os pontos (–1,2) e (3,4). A reta que passa por esses dois pontos pode ser visualizada na Figura 1.7. Tem-se:

- a imagem de –1 é 2 ou $f(-1) = a(-1) + b = 2$;
- a imagem de 3 é 4 ou $f(3) = a(3) + b = 4$.

Assim, escreve-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 3a + b = 4 \end{cases}$$

Com um pouco de algebrismo, é possível constatar que os valores de *a* e *b* são $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{5}{2}$.

Assim, a lei de formação da função é $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

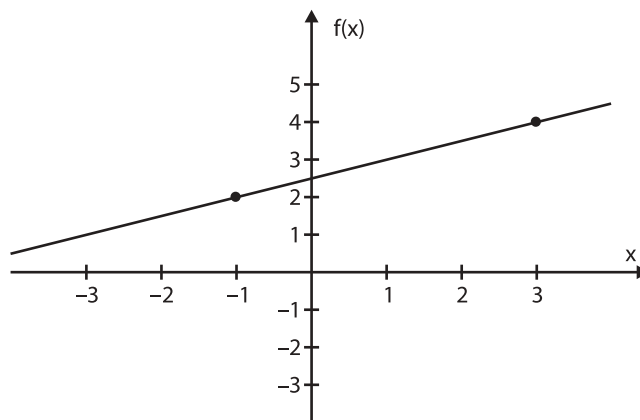
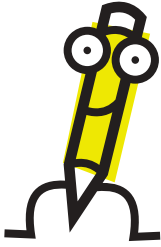



Figura 1.7 Reta que passa por (-1,2) e (3,4).

Agora é a sua vez!

1) Construa o gráfico da função $g(x) = 3 - \frac{x}{2}$.

2) Encontre a equação da reta que passa pelos pontos $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e $(-1,3)$.

Você sabia que uma mosca pode ter inspirado a formalização da notação do sistema cartesiano?

O sistema cartesiano usado para fazer as representações gráficas é devido ao matemático René Descarte. Em toda a história da matemática encontra-se lendas que justificam idéias brilhantes e criativas. No caso de Descartes muitas lendas são apresentadas. Uma delas nos diz que "o estalo inicial da geometria analítica teria ocorrido a Descartes ao observar uma mosca que caminhava pelo forro de seu quarto, junto a um dos cantos. Teria chamado a sua atenção que o caminho da mosca sobre o forro poderia ser descrito se, e somente se, a relação ligando as distâncias dela às paredes adjacentes fosse conhecida". (EVES, 1995, P.389)

Veja na tabela abaixo algumas propriedades e características da função do primeiro grau:

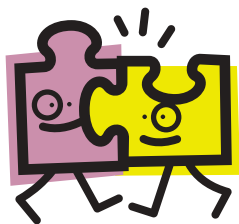
Domínio	D(f) = $\mathbb{R}$
Conjunto Imagem	Im = $\mathbb{R}$
Representação Gráfica	É uma reta
Zero ou Raiz	Ponto em que o gráfico corta o eixo dos x, ou seja, valores de x tais que f(x) = 0: $y = f(x) = ax + b$ $f(x) = 0$ $ax + b = 0$ $x = \frac{-b}{a}$
Crescimento ou Decrescimento	Para as funções do primeiro grau a análise do crescimento e do decrescimento pode ser feita através do sinal do coeficiente angular: $a > 0 \Rightarrow$ função crescente $a < 0 \Rightarrow$ função decrescente
Sinal da função (sinal da imagem da função)	O sinal de uma função do primeiro grau pode ser analisado da seguinte forma: $f(x) > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x > \frac{-b}{a}$ $f(x) < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x < \frac{-b}{a}$ sendo $x = \frac{-b}{a}$ o zero da função

Em tempo

Graficamente a função é positiva acima do eixo dos x e é negativa abaixo deste eixo. Exatamente no eixo dos x a função é nula.

Definição: *Crescimento e decrescimento de uma função*

Uma função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é crescente se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

Uma função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é decrescente se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplos

1) Considerando a função $f(x) = 3x - 2$, determinar:

(a) o gráfico de f(x);

(b) o ponto em que a reta cruza o eixo x;

(c) o ponto em que a reta cruza o eixo y;

(d) se a função é crescente ou decrescente.

(a) Na Figura 1.8 tem-se o gráfico de $f(x) = 3x - 2$.

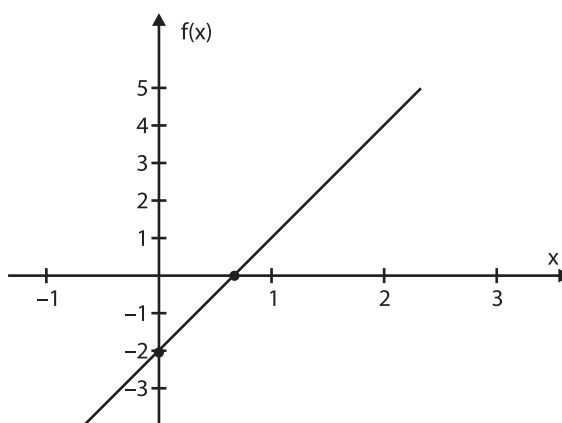



Figura 1.8 Gráfico de $f(x) = 3x - 2$.

(b) Quando a reta cruza o eixo x, obrigatoriamente, y assume o valor 0:

$$3x - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Assim, a reta cruza o eixo x em $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

(c) Quando a reta cruza o eixo y, obrigatoriamente, x assume o valor 0:

$$y = 3 \cdot 0 - 2 \Rightarrow y = -2$$

Assim, a reta cruza o eixo y em (0,–2). Observe que o valor –2 é perceptível na lei de formação da função (coeficiente linear).

(d) A função é crescente, pois $a = 3$, ou seja, $a > 0$.

2) Determinar a raiz de cada uma das seguintes funções.
Visualizar graficamente.

(a) $f(x) = 2x - 1$

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = ½$ (ver figura 1.9)

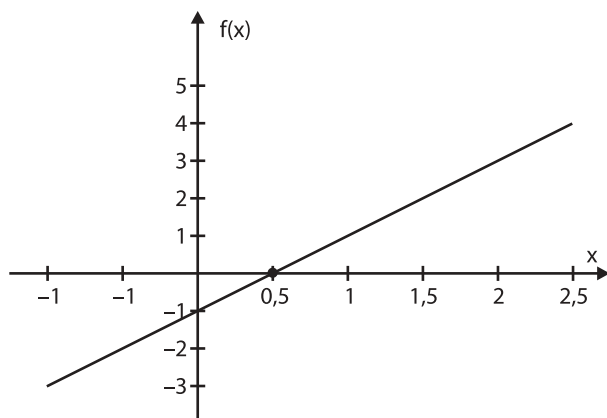



Figura 1.9 Gráfico de $y = 2x - 1$.

(b) $f(x) = -x + 1$

$-x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (ver figura 1.10)

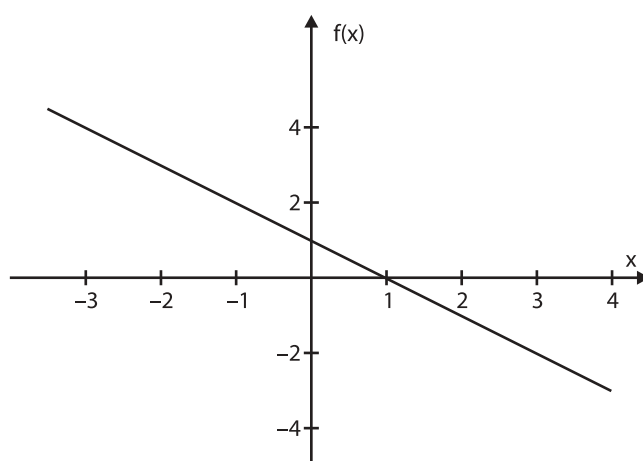
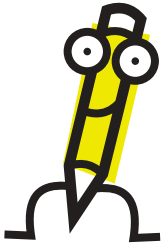



Figura 1.10 Gráfico da função $y = -x + 1$.

Agora é a sua vez!

Para função $v(t) = -5 + 10t$, determine:

(a) o gráfico de $v(t)$;

(b) o domínio e o conjunto imagem de $v(t)$;

(c) se a função $v(t)$ é crescente ou decrescente;

(d) o sinal da função $v(t)$.

Função polinomial do segundo grau

Chama-se função do segundo grau a função que associa cada número real x, o número real $ax^2 + bx + c$.

Linguagem Simbólica:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

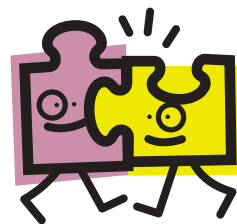
O **domínio** desta função é o conjunto dos reais e o conjunto imagem pode ser encontrado em função dos parâmetros a, b e c.

O gráfico da função do segundo grau é uma **parábola**. Toda a parábola tem um eixo de simetria e sua concavidade pode ser voltada para cima ou para baixo.

Exemplos

1) Veja exemplos de funções do segundo grau:

- $y = 2x^2 + 3x + 1$
- $p = x^2 - \frac{x}{2} + 5$
- $y = -x^2 + x - 1$
- $y = 3 - x^2$
- $y = x^2$

Em tempo
Perceba que, em algumas funções, os valores de b e c são iguais a zero. O que não pode acontecer é **a = 0**, pois não caracterizaria uma função do segundo grau.

2) Fazer o gráfico da função $y = x^2 + x - 2$.

Para traçar o gráfico da função $y = x^2 + x - 2$, podemos construir uma tabela atribuindo valores para x e determinando os valores correspondentes de y:

x	$y = x^2 + x - 2$	y
−2	$y = (-2)^2 - 2 - 2$	0
−1	$y = (-1)^2 - 1 - 2$	−2
0	$y = (0)^2 - 0 - 2$	−2
1	$y = (1)^2 + 1 - 2$	0
2	$y = (2)^2 + 2 - 2$	4

A cada par ordenado (x,y) corresponde um ponto no plano cartesiano de forma que se tem o gráfico da Figura 1.11.

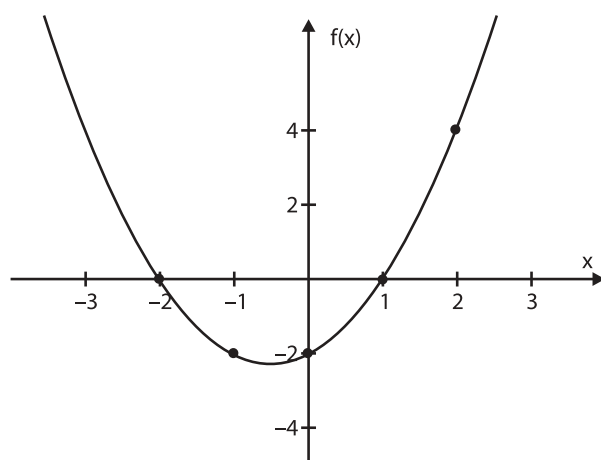



Figura 1.11 Gráfico de $y = x^2 + x - 2$.

3) Fazer o gráfico da função $y = (2 - x)(x + 2)$.

A função do segundo grau está representada em sua forma fatorada e as raízes são visíveis graficamente e algebricamente.

A representação gráfica será dada na Figura 1.12.

x	y = (2 – x)(x + 2)	y
–2	y = (2 –(–2))(–2 + 2)	0
–1	y = (2 –(–1))(–1 + 2)	3
0	y = (2 – 0)(0 + 2)	4
1	y = (2 – 1)(1 + 2)	3
2	y = (2 – 2)(2 + 2)	0

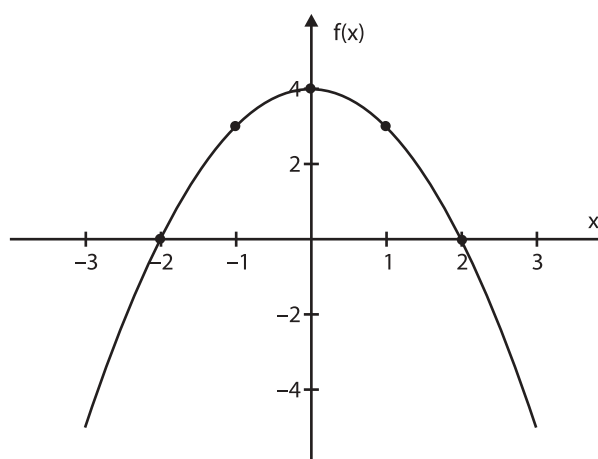
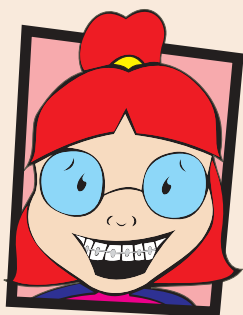
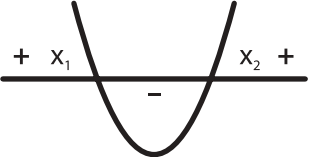
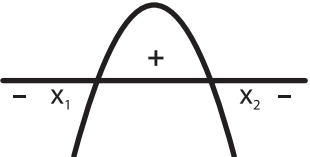
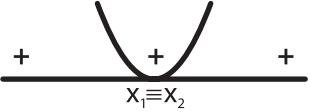
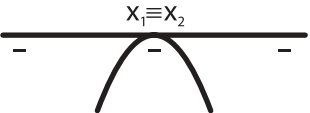
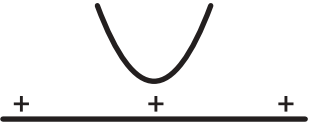



Figura 1.12 Gráfico de $y = (2 - x)(x + 2)$.

Veja que interessantes as aplicações práticas que envolvem as funções do segundo grau.

A parábola é uma figura geométrica que possui como característica o fato de refletir todos os raios que nela incidem para um único ponto, o foco da parábola. Devido a esta característica, muitas aplicações práticas envolvem as funções do segundo grau.

Por exemplo, podemos utilizar a radiação solar para fins domésticos no cozimento de alimentos.

Quando um satélite artificial é colocado em uma órbita geoestacionária, ele passa a emitir ondas eletromagnéticas. Estas ondas eletromagnéticas, por sua vez, podem ser captadas pela antena parabólica ou radar e são refletidas num único ponto, o foco da parábola. Quando isto acontece, as ondas eletromagnéticas serão conduzidas a um decodificador que as transformará em imagem ou som.

Veja na tabela a seguir algumas propriedades e características da função do segundo grau:

Domínio	$D(f) = \mathbb{R}$
Conjunto Imagem	O conjunto imagem é dado por $y \geq \frac{-\Delta}{4a}, \forall x \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ ou $y \leq \frac{-\Delta}{4a}, \forall x \in \mathbb{R}$ e $a < 0$.
Representação Gráfica	É uma parábola e o sinal do coeficiente a na expressão que representa genericamente a função do segundo grau ($y = ax^2 + bx + c$) é que determina a concavidade da parábola. O eixo de simetria é paralelo ao eixo dos y e igual a $x = \frac{-b}{2a}$ e o ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, sendo $\Delta = b^2 - 4a$ o discriminante é chamado vértice da parábola. Este ponto vai ser um ponto de máximo ou de mínimo da função em acordo com a concavidade.
Zero ou Raiz	A existência de zeros para a função do segundo grau no contexto real fica condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$. Tem-se os seguintes casos: $\Delta > 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\Delta = 0 \quad x = \frac{-b}{2a}$ $\Delta < 0$ Não existem raízes reais.
Crescimento ou Decrescimento	De acordo com a concavidade da parábola, tem-se dois casos: Concavidade para cima ($a > 0$) Intervalo de crescimento: $x > x_V$ Intervalo de decrescimento: $x < x_V$ Concavidade para baixo ($a < 0$) Intervalo de crescimento: $x < x_V$ Intervalo de decrescimento: $x > x_V$ sendo x_V a abscissa do ponto do vértice da parábola.
Sinal da função (sinal da imagem da função)	Sinal **positivo** $f(x) > 0; ax^2 + bx + c > 0$ Sinal **negativo** $f(x) < 0; ax^2 + bx + c < 0$ Da mesma forma que a determinação dos zeros ou raízes da função do segundo grau está condicionada ao valor de Δ, a análise do sinal também deve levar este valor em consideração.

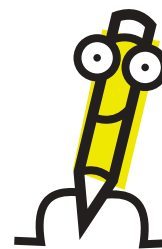
Para ficar mais claro a análise do sinal da função do segundo grau, veja na tabela a seguir a relação entre os sinais de Δ e *a*, os zeros ou raízes e o sinal da função.

Sinais de Δ e ***a***	Zeros ou raízes	Sinal positivo	Sinal negativo	Esboço da representação gráfica
$\Delta > 0$ $a > 0$	x_1 e x_2 com $x_1 < x_2$	$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$	$x \in (x_1, x_2)$	+ x1 – x2 +
$\Delta > 0$ $a < 0$	x_1 e x_2 com $x_1 < x_2$	$x \in (x_1, x_2)$	$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$	– x1 + x2 –
$\Delta = 0$ $a > 0$	x_1 e x_2 com $x_1 = x_2$	$x \in \mathbb{R}$	A função não assume valores negativos.	+ + + x1≡x2
$\Delta = 0$ $a < 0$	x_1 e x_2 com $x_1 = x_2$	A função não assume valores positivos	$x \in \mathbb{R}$	x1≡x2 – – –
$\Delta < 0$ $a > 0$	Não temos raízes reais	$x \in \mathbb{R}$	A função não assume valores negativos.	+ + +
$\Delta < 0$ $a < 0$	Não temos raízes reais	A função não assume valores positivos	$x \in \mathbb{R}$	– – –

Agora é a sua vez!

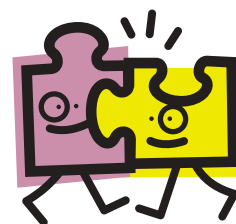
1) Analise o sinal das funções:

(a) $y = -x^2 - x - 1$

(b) $y = 2x^2 + 3x + 1$

Exemplo

1) Uma indústria produz quantidades x e y de dois produtos diferentes que utilizam o mesmo processo de fabricação. A curva do produto transformado é dada por $y = 20 - \frac{x^2}{5}$. Qual o maior valor que y pode assumir?

Antes de responder à pergunta proposta, trace o gráfico da função do segundo grau. Como você já estudou, existem características da função do segundo grau que podem ser levadas em consideração quando do traçado do gráfico.

- O sinal do coeficiente a na função do segundo grau $y = ax^2 + bx + c$ é que determina a concavidade da parábola. Neste exemplo $a = \frac{-1}{5}$ e, portanto se tem concavidade para baixo.
- O ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, sendo $\Delta = b^2 - 4a$ é o vértice da parábola. Este ponto vai ser um ponto de máximo ou de mínimo da função, conforme a concavidade esteja voltada para baixo ou para cima, respectivamente.

Nesta função $a = \frac{-1}{5}$, $b = 0$ e $c = 20$. Portanto,

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}\right) = V\left(\frac{-0}{2 \cdot \frac{-1}{5}}, \frac{-\left(0^2 - 4 \cdot \frac{-1}{5} \cdot 20\right)}{4 \cdot \frac{-1}{5}}\right)$$

$$V\left(0, \frac{\frac{-80}{5}}{4 \cdot \frac{-1}{5}}\right) = V\left(0, -16 \cdot \frac{5}{-4}\right) = V(0,20)$$

Como a concavidade da parábola é para baixo, o ponto do vértice encontrado V(0,20) é o ponto de máximo da função analisada.

- Os zeros ou raízes de uma função $y = f(x)$ são os valores reais x tais que $f(x) = 0$. Na função do exemplo, $y = 20 - \frac{x^2}{5}$, tem-se:

$$20 - \frac{x^2}{5} = 0$$

$$\frac{x^2}{5} = 20$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \pm\sqrt{100} \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -10 \end{cases}$$

- Neste exemplo, a concavidade é para baixo e $x_V = 0$. Então a função é crescente quando $x < 0$ e decrescente quando $x > 0$.

A representação gráfica desta função é dada na Figura 1.13:

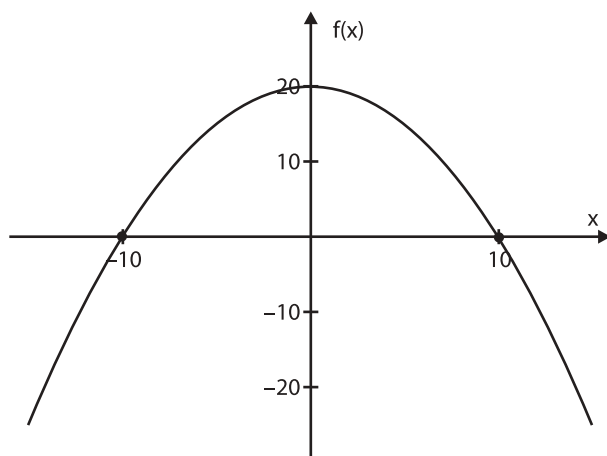
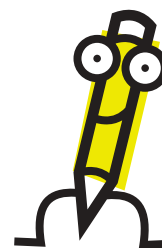
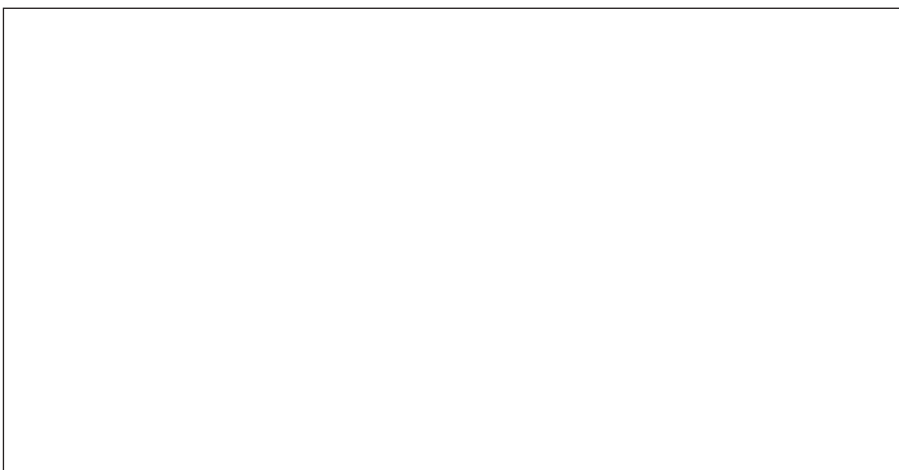



Figura 1.13 Representação gráfica da função $y = 20 - \frac{x^2}{5}$.

Observe que as características encontradas auxiliam no traçado da parábola que representa a função.

Agora fica mais fácil responder à pergunta proposta no problema que é a identificação do maior valor que y pode assumir. Basta olhar para o gráfico para dizer que o maior valor que a variável y assume é igual a 20, que coincide com o ponto de máximo da função.

Agora é a sua vez!

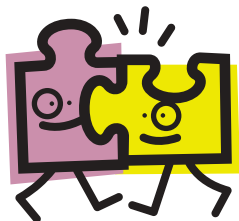
1) Analise as características e propriedades e trace o gráfico da função $y = (2 - x)(x + 3)$.

Função racional

No decorrer desta disciplina você terá muitas oportunidades de trabalhar com funções racionais. São funções definidas como o quociente de duas funções polinomiais. Veja

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Considera-se que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e $Q(x) \neq 0$.

Diante da definição é fácil constatar que o **domínio da função** deve ser um conjunto de números reais excluindo todos os x tais que $Q(x) = 0$.

Vamos exemplificar esse tipo de função, aproveitando para estabelecer sua representação gráfica e discutir as suas características identificáveis graficamente.

Exemplos

1) Analise a função $f(x) = \frac{1}{x}$

Talvez este seja o exemplo mais clássico e mais simples de uma função racional. Observe o gráfico na Figura 1.14 e as características listadas.

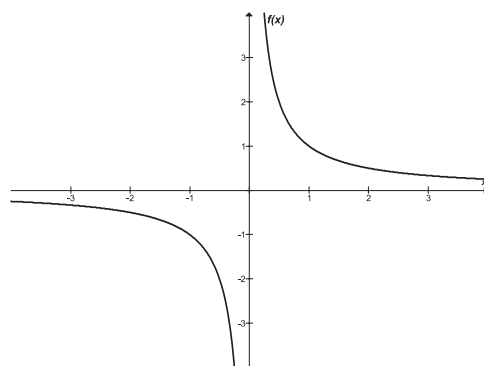



Figura 1.14 Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Domínio: Observe que a função não está definida no zero, pois $Q(x) = x$ deve ser diferente de zero. Assim, $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Conjunto imagem:
$Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

É uma função com duas partes gráficas, ambas **decrescentes**.

2) Observe o gráfico da $f(x)=\dfrac{(x+2)}{(x-2)(x+1)}$ desenhado na Figura 1.15. Qual é o domínio dessa função?

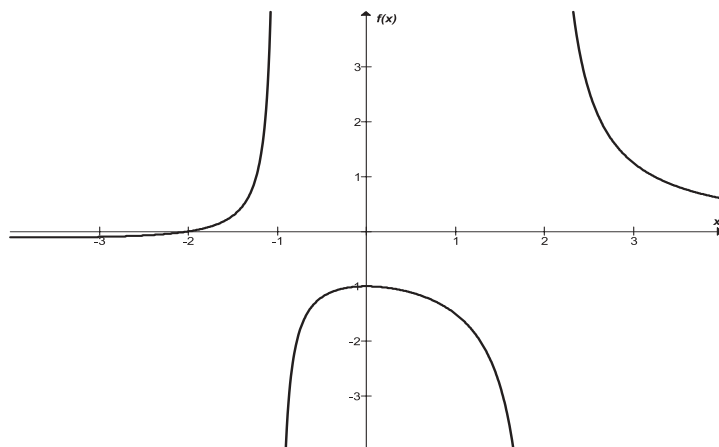



Figura 1.15 Gráfico de $f(x)=\dfrac{(x+2)}{(x-2)(x+1)}$.

Ao observar o gráfico é possível constatar que a função não está definida nos valores de $x=-1$ e $x=2$. De fato esses valores anulam o denominador da expressão que define a função. Portanto, o domínio é:

$D(f)=\mathbb{R}-\{-1,2\}$

3) Observe agora o gráfico da função $y=\dfrac{2x^4+x^3-14x^2+5x+6}{x^3-7x+6}$ na Figura 1.16.

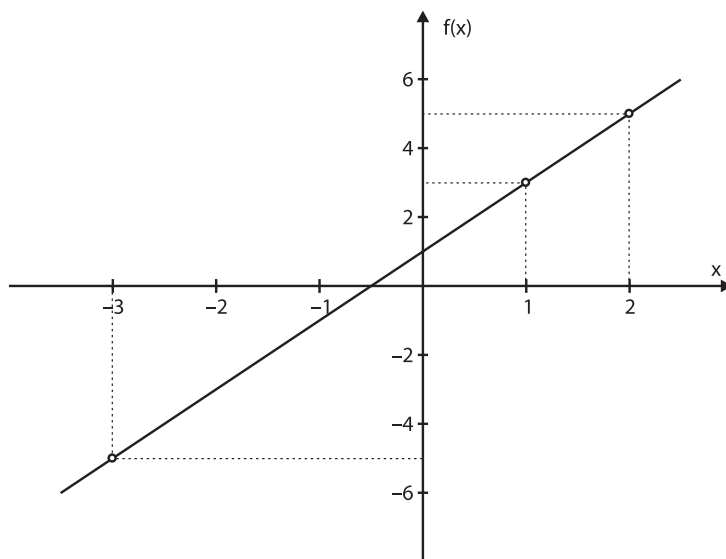



Figura 1.16 Gráfico de $y=\dfrac{2x^4+x^3-14x^2+5x+6}{x^3-7x+6}$.

Não se espante!

É isso mesmo. Para entender melhor o porquê obtemos um gráfico linear com a exclusão de 3 pontos, basta analisar com um pouco mais de detalhe a expressão que define a função.

O polinômio $2x^4 + x^3 - 14x^2 + 5x + 6$ tem como raízes -1, $-\frac{1}{2}$, 2 e 3. O polinômio do denominador tem como raízes 2, –3 e 1. Assim, você pode obter a expressão $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x+3)(2x+1)}{(x-2)(x+3)(x-1)}$.

Se você simplificar os fatores vai obter simplesmente a expressão linear que dá o desenho da figura. Como o domínio da função é

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-3,1,2\}$$

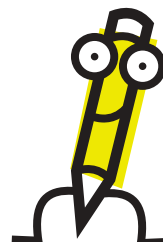
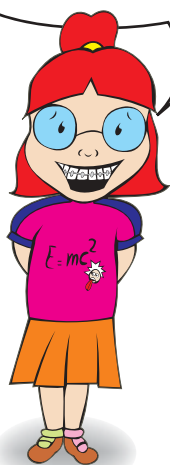
os pontos correspondentes aparecem em aberto.

Observação: *Lembre-se que para encontrar as raízes dos polinômios, você pode usar o Método de Ruffini, discutido na seção 3.*

Agora é a sua vez!

1) Analise as seguintes funções racionais:

(a) $y = \frac{1}{x-2}$

(b) $y = \frac{(x-3)}{(x+1)(x-1)}$

SEÇÃO 5

Funções exponenciais e logarítmicas

Antes do estudo das funções exponenciais e logarítmicas, é importante que você revise os objetos matemáticos envolvidos: as potências e os logaritmos. Desta forma, iniciamos esta seção apresentando, rapidamente, as regras gerais sobre potências, a definição e as propriedades dos logaritmos.

Potências

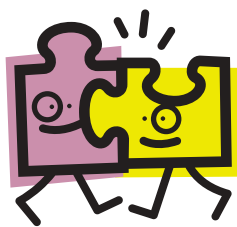
Potência com expoente natural

Considere um número real a e um número natural n, diferente de zero. A expressão a^n (potência de base a e expoente n), representa um produto de n fatores iguais de a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fatores}}$$

Potência com expoente racional

Para a real, b real e n inteiro positivo, tem-se:

$\sqrt[n]{a} = b$ *sendo: n índice; a radicando; b raiz.*

Exemplos

(a) $(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = 4$

(b) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

(c) $2^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2}$

(d) $3^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Para que os cálculos fiquem facilitados, é importante que você lembre das propriedades que envolvem as potências com expoente natural e com expoente racional. Veja na tabela abaixo, um resumo das propriedades com alguns exemplos.

As propriedades apresentadas estão escritas de forma genérica, portanto deve-se observar sua validade no contexto dos números reais.

Propriedades	Exemplos
Multiplicação de potências de mesma base: mantemos a base e somamos os expoentes.	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+2} = 2^7$
Divisão de potências de mesma base: mantemos a base e subtraímos os expoentes.	
$a^m \div a^n = a^{m-n}$ com $a \neq 0$	$3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$
$a^0 = 1$ com $a \neq 0$	$10^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$3^2 \div 3^6 = 3^{2-6} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4}$
$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$ e $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{5}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{5}{7}\right)} = 1\cdot\frac{7}{5} = \frac{7}{5}$
$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$	$(5^2)^4 = 5^{2\cdot4} = 5^8$

Logaritmo

Os logaritmos surgiram para simplificar os cálculos, pois ao aplicarmos logaritmo em uma multiplicação é possível transformá-la numa soma.

Pense num número, digamos 16, agora tente responder: a qual expoente é necessário elevar o número 2 para obter 16? Sem muitas dificuldades chega-se ao resultado 4, ou seja

■ $2^4 = 16$

Apesar de um nome um pouco assustador – **logaritmo**, o que se faz, nada mais é que a busca de um expoente, isto é, calcular o logaritmo de um número $b > 0$ numa base $a > 0$ e $a \neq 1$, é encon-

Propriedades	Exemplos
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$
$(a \div b)^n = a^n \div b^n$ ou $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$(4 \div 7)^3 = \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4^3}{7^3} = 4^3 \div 7^3$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{4^2 \cdot 4} = 4 \cdot \sqrt[2]{4} = 4 \cdot 2 = 8$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$	$\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 3^{\frac{2+1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt{\sqrt[5]{2^3}} = \sqrt[10]{2^3}$ ou $\sqrt{\sqrt[5]{2^3}} = \left(2^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{10}}$

trar uma maneira de escrever *b* como uma potência de *a*, melhor dizendo, qual expoente que devemos elevar *a* para obter *b*? No exemplo:

$log_2 16 = 4 \quad pois \quad 2^4 = 16$

De maneira geral,

$log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b \quad com\ a > 0,\ a \neq 1\ e\ b > 0$

- O número *b* é chamado de **logaritmando**;
- O número *a* é chamado de **base**;
- O número *x* é chamado de **logaritmo**.

Observação:

1. Quando calcula-se $log_a b = x$, note que para qualquer base $a > 0$, não existe expoente para a, que retorne um número negativo, logo $b > 0$.

2. Note que nunca pode-se calcular o $log_1 b$, pois o número 1 elevado a qualquer expoente é sempre igual a 1, ou seja, não consegue-se escrever qualquer número positivo b, na base 1, logo $a \neq 1$.

Quando a base do logaritmo for igual a 10, não é comum escrever a base, por exemplo, para $\log_{10} 100$ escreve-se simplesmente log 100, e fica subentendido que a base é 10. Aos logaritmos na base 10, dá-se o nome de **logaritmos decimais** ou de *Briggs*.

Calculando logaritmos na calculadora.

Experimente calcular o logaritmo usando uma calculadora científica (no seu computador deve existir uma no Windows). Perceba que, dependendo da base do logaritmo, bem como do logaritmando, os valores encontrados para o logaritmo possuem várias casas decimais. Em muitas situações, somente a calculadora auxilia neste processo.

Aos logaritmos que utilizam como base o número e irracional, que tem o valor aproximado de 2,781..., dá-se o nome de **logaritmos naturais** ou **logaritmos neperianos**. A sua notação também pode ser diferente: $\log_e b = \ln b$.

Exemplos

1) Calcular $\log_{10} 10000$

Se $\log_{10} 10000 = x$ então $10^x = 10000$

$10^x = 10^4$

$x = 4$

Portanto $\log_{10} 10000 = 4$.

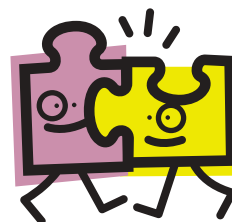
2) Calcular $\log_{347} \frac{1}{49}$

Se $\log_{347} \frac{1}{49}$ então $347^x = \frac{1}{49}$

$$(7^3)^x = \frac{1}{7^2}$$

$$7^{3x} = 7^{-2}$$

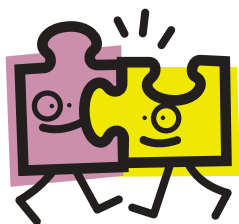
$$3x = -2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Propriedades do Logaritimo
1. $\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$
2. $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
3. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

Observação:

$\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$

$\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$

$\log_a a^m = m$

Exemplos

1) Simplificar as expressões, usando as propriedades do logaritmo:

(a) $\log\ 2 - \log\ 4 = \log\left(\frac{2}{4}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$

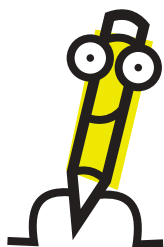
(b) $\ln 3^2 + \ln 3 - \ln 9$

$= 2 \cdot \ln 3 + \ln 3 - \ln (3 \cdot 3)$

$= 3 \cdot \ln 3 - (\ln 3 + \ln 3)$

$= 3 \cdot \ln 3 - 2 \cdot \ln 3$

$= \ln 3$

Agora é a sua vez!

1) Calcule os seguintes logaritmos:

(a) $\log_3 27$

(b) $\log_3 \left(\frac{1}{243}\right)$

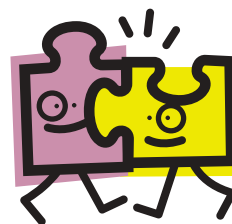
(c) $\log_{10} 100$

(d) $\log_{81} \sqrt[4]{3}$

Função exponencial

De forma bastante simples pode-se definir a função exponencial. É uma função real que associa a cada número real x o número a^x, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Pode-se escrever:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a^x$$

ou $f(x) = a^x$ *para* $a > 0,\ a \neq 1$

Exemplos

(a) $f(x) = 3^x$

(b) $f(x) = 2^{x+1}$

(c) $y = \sqrt[3]{2^x}$

> ***Observação:***
>
> *Por que a deve ser positivo?*
>
> *Suponha que a = –9 e x =* $\frac{1}{2}$.
>
> *A função f(x) =* $(-9)^{1/2} = \sqrt{-9}$.
>
> *Assim, você teria como resposta um número **não** real.*

Gráfico da função exponencial

Analise o gráfico das seguintes funções:

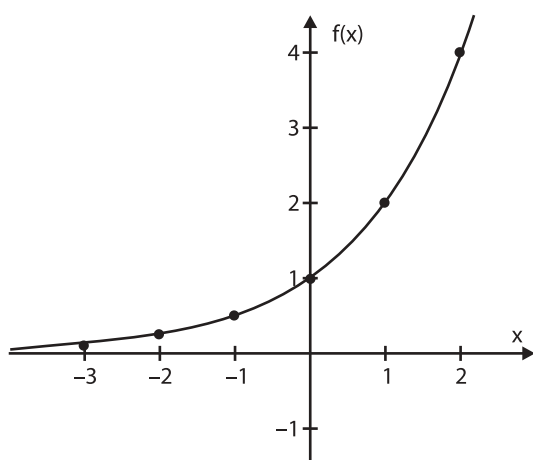
a) $f(x) = 2^x$

x	$f(x) = 2^x$	y
–3	2^{-3}	⅛
–2	2^{-2}	¼
–1	2^{-1}	½
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8

Figura 1.17 Gráfico de $f(x) = 2^x$.

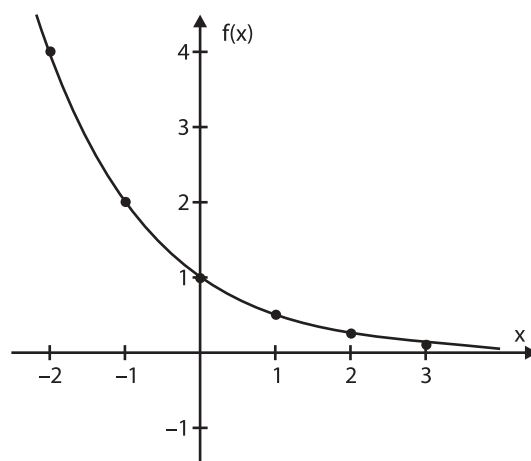
b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x) = (1/2)^x$	y
–3	$(1/2)^{-3}$	8
–2	$(1/2)^{-2}$	4
–1	$(1/2)^{-1}$	2
0	$(1/2)^{0}$	1
1	$(1/2)^{1}$	½
2	$(1/2)^{2}$	¼
3	$(1/2)^{3}$	⅛

Figura 1.18 Gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Propriedades

Pela observação das tabelas e gráficos, podemos enunciar as seguintes características:

- o domínio são todos os reais;
- a imagem é sempre positiva, excluindo o zero;
- o gráfico passa pelo ponto (0,1);
- para $a > 1$ a função é crescente;
- para $0 < a < 1$ a função é decrescente.

Com um pouco de formalismo matemático é possível provar que essas características são gerais para as funções exponenciais.

Função logarítmica

Agora você irá estudar a função logarítmica de forma comparativa com a função exponencial. Perceba que essas funções são inversas uma da outra.

Ao resolver um problema prático é possível utilizar a função exponencial ou a função logarítmica. Por que isto acontece?

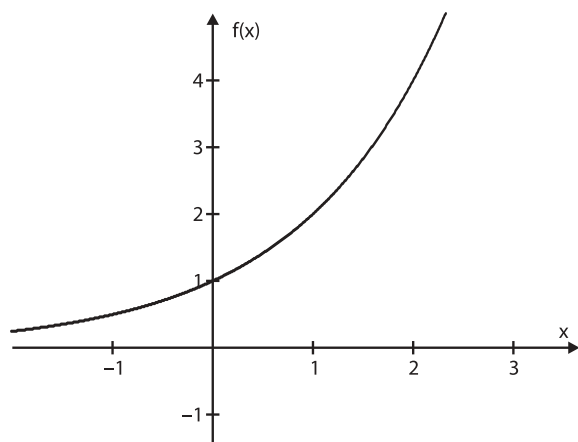
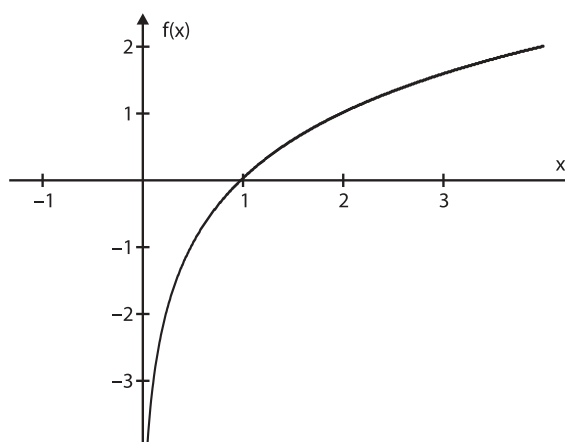
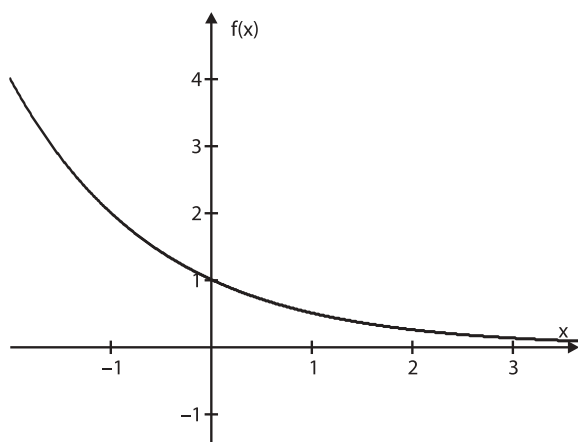
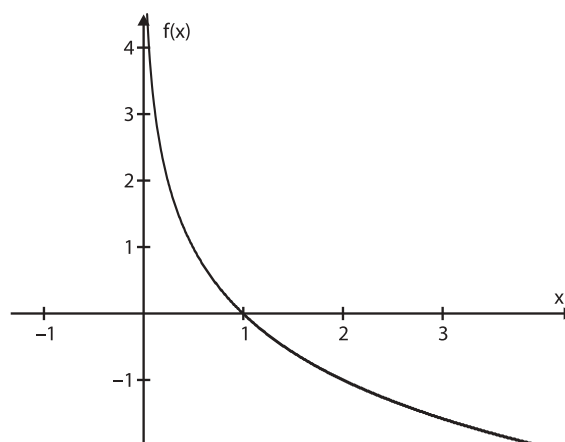
Para responder esta pergunta lembre da definição de logaritmo:

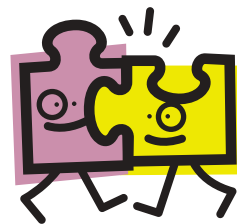
$log_a\, b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b \quad com\ a > 0,\ a \neq 1\ e\ b > 0$

As operações indicadas são ditas inversas. Da mesma forma, a função exponencial é a função inversa da função logarítmica ou vice-versa. Na seção 4, sobre funções, você estudou a definição de função inversa. Portanto, formalmente podemos definir a função logarítmica como a função inversa da função exponencial. Assim

$y = log_a\, x, \quad se\ e\ somente\ se, \quad a^y = x$

Faça uma análise conjunta das duas funções facilitando, assim, as reflexões sobre as propriedades e características.

Função Exponencial	**Função Logarítmica**
Definição: Dado um número real a, tal que $0 < a \neq 1$, chama-se função exponencial de base a a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número a^x.	**Definição:** Dado um número real a, tal que $0 < a \neq 1$, chama-se função logarítmica de base a a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número $\log_a x$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto a^x$	$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \log_a x$
Domínio: $D(f) = \mathbb{R}$ Imagem: $Im(f) = (0,+\infty)$.	Domínio: $D(f) = (0,+\infty)$ Imagem: $Im(f) = \mathbb{R}$
$f(x) = a^x$ é crescente se, e somente se $a > 1$ (ver Figura 1.19) e decrescente se, e somente se $0 < a < 1$ (ver Figura 1.20).	$f(x) = \log_a x$ é crescente se, e somente se $a > 1$ (ver Figura 1.21) e decrescente se, e somente se, $0 < a < 1$ (ver Figura 1.22).
Com relação ao gráfico da função $f(x) = a^x$, pode-se dizer que: 1°) A curva que representa esta função está toda acima do eixo dos x, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. 2°) A curva sempre corta o eixo y no ponto de ordenada 1, pois, se $x = 0$, então $f(0) = a^0 = 1$.	Com relação ao gráfico da função $f(x) = \log_a x$ pode-se dizer que: 1°) A curva que representa esta função está todo a direita do eixo dos y, já que esta função só é definida para $x > 0$. 2°) A curva corta o eixo dos x no ponto de abscissa 1, pois, se $x = 1$, então $f(1) = \log_a 1 = 0$.

Função Exponencial	**Função Logarítmica**
Figura 1.19 Gráfico de $y = a^x$ para a > 1.	**Figura 1.21** Gráfico de $y = \log_a x$ para $a > 1$.
Figura 1.20 Gráfico de $y = a^x$ para $0 < a < 1$.	**Figura 1.22** Gráfico de $y = \log_a x$ para $0 < a < 1$.

As funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$ são inversas uma da outra.

O gráfico de $f(x) = a^x$ é simétrico ao gráfico da função $g(x) = \log_a x$ em relação a reta $y = x$.

Exemplos

1) Esboçar o gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x) = 3^x$

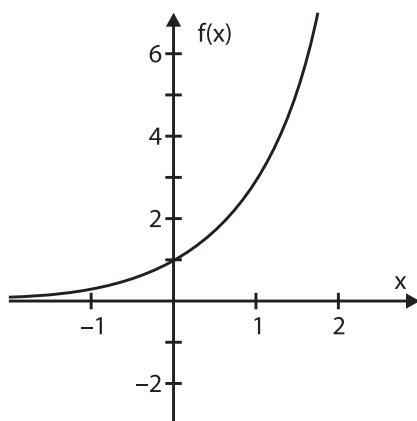



Figura 1.23 Gráfico de $f(x) = 3^x$.

(b) $f(x) = \log_2 x$

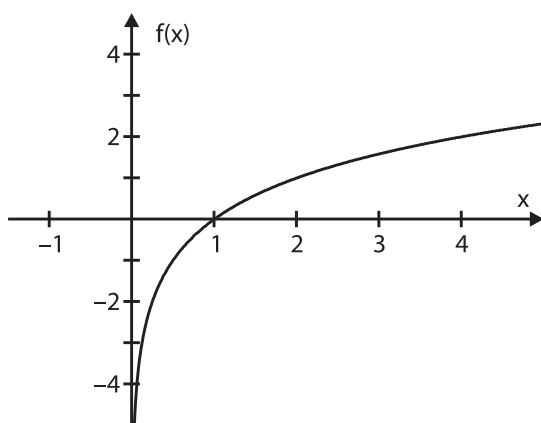



Figura 1.24 Gráfico de $f(x) = \log_2 x$.

2) Identificar se o as seguintes funções são crescentes ou decrescentes:

(a) $f(x) = 6^x$ *Crescente*

(b) $f(x) = (3/4)^x$ *Decrescente*

(c) $f(x) = \log_3 x$ *Crescente*

3) Esboçar num mesmo sistema cartesiano os gráficos de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Perceba que as funções são inversas e existe a simetria em relação à reta $y = x$.

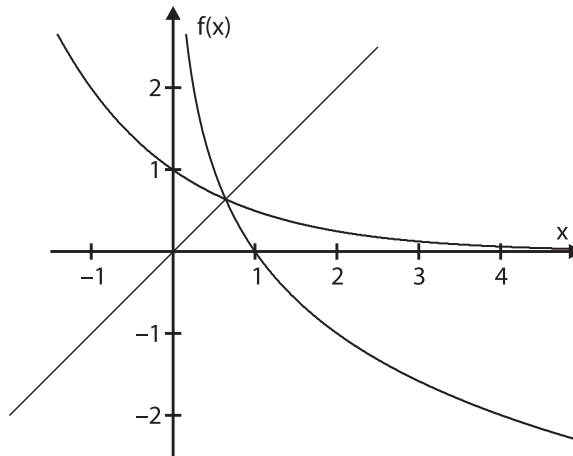



Figura 25 Gráficos de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

SEÇÃO 6

Funções trigonométricas

Nesta seção vamos discutir as funções trigonométricas. Estas funções são muito importantes para as áreas da Engenharia e Matemática, pois podem modelar vários fenômenos físicos.

Para discutir as funções trigonométricas com facilidade é importante que você revise alguns conceitos básicos de trigonometria. Assim, para facilitar seus estudos, inserimos um item com resumos para que você consiga iniciar algumas reflexões.

Revisando trigonometria

É possível discutir elementos da trigonometria no triângulo retângulo ou no círculo trigonométrico. É importante que você visualize a relação entre essas duas abordagens para lidar com as funções trigonométricas.

Na Figura 1.26 tem-se um triângulo retângulo. Observe as características enumeradas.

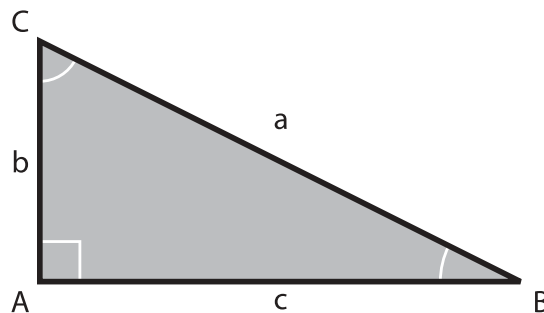



Figura 1.26 Triângulo retângulo.

1) O triângulo ABC é retângulo. O ângulo A é o ângulo reto (mede 90 graus);
2) A hipotenusa do triângulo dado mede *a*, e os catetos medem *b* e *c*;
3) O cateto b é oposto ao ângulo $\hat{B}$ e adjacente ao ângulo $\hat{C}$;
4) O cateto c é oposto ao ângulo $\hat{C}$ e adjacente ao ângulo $\hat{B}$;
5) Vale o Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$;
6) Valem as relações que definem seno $\hat{B}$, cosseno de $\hat{B}$ e tangente de $\hat{B}$:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \text{ ou sen } \hat{B} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \text{ ou } \cos \hat{B} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \text{ ou tg } \hat{B} = \frac{b}{c}$$

De forma similar é possível estabelecer as razões para o ângulo $\hat{C}$;

7) A cotangente de um ângulo é o inverso da tangente;
8) A secante é o inverso do cosseno;
9) A cossecante é o inverso do seno.

Você pode fazer um jogo algébrico e formatar várias expressões envolvendo ângulos e lados de um triângulo retângulo. Ao fazer isto você estará analisando a trigonometria no triângulo retângulo.

Veja agora a Figura 1.27 que apresenta um círculo trigonométrico (círculo de raio 1). Observe triângulos retângulos e visualize exatamente as relações citadas anteriormente. Já que o triângulo OAP tem como medida de sua hipotenusa o valor 1, as relações trigonométricas ficam geometricamente representadas por segmentos. Por exemplo,

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{medida de } AP}{\text{medida de } OP} = \text{medida de } AP \text{ ou medida de } OB$$

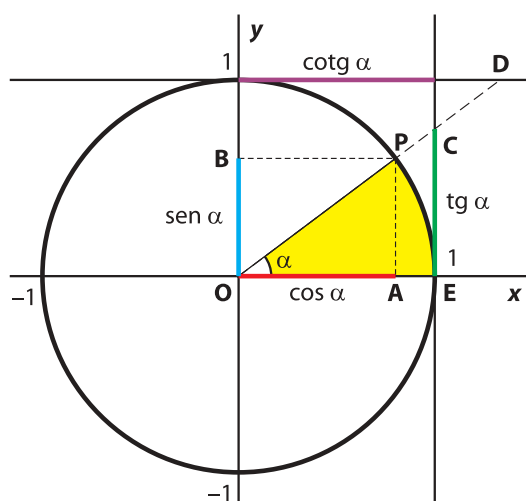



Figura 1.27 Círculo trigonométrico.

Você está pronto para iniciar a discussão das funções trigonométricas?

A Sabedoria Pitagórica.

A Matemática não sobrevive sem o famoso Teorema de Pitágoras. Quem não ouve falar de Pitágoras? Acreditamos que este filósofo matemático é efetivamente o mais conhecido!

Como precisar o verdadeiro caráter desse gênio?

Nem todos os autores que se ocuparam com a biografia de Pitágoras, fizeram ressaltar, com perfeita nitidez, a idéia das concepções básicas que permearam a vida desse gênio. Estudaram-no com um estreito critério, perdendo de vista a transcendência do seu ideal. Pitágoras foi mais que um instrutor de antigos mistérios, legislador, astrólogo, matemático, músico, médico ou matemático.

Talvez dizer que foi simplesmente um filósofo que marcou a humanidade poderá refletir um pouco da grandeza dos seus ensinamentos filosóficos, nos quais incluí-se os específicos de matemática.

Pitágoras foi um predestinado a grandes tarefas, graças a sua superior inteligência e sabedoria precoce. É importante pensar em Pitágoras além da fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ele deixou um ensinamento fundamental:

"O homem é um pequeno mundo (microcosmo): possui um corpo físico como o universo possui uma natureza física; tem vida e força como o universo tem energia e movimento; experimenta emoções que se podem comparar na Natureza, com os fenômenos meteorológicos; tem uma razão equivalente à providência maternal da Natureza; enfim, o homem aspira à sabedoria, à harmonia, à felicidade e à justiça, e esta faculdade é o reflexo humanizado destas supremas Leis que regem a evolução universal".

(MACÉ, F. **A Sabedoria Pitagórica.**
Curitiba: Biblioteca Neo-Pitagórica, 1963)

As funções trigonométricas

Basicamente, no item anterior já definimos as funções trigonométricas. As funções seno e cosseno são definidas a partir do círculo trigonométrico e as demais em termos de seno e cosseno.

Função Seno e Função Cosseno

Considere x um número real que representa a medida em radianos de um ângulo central desenhado no círculo trigonométrico, como mostra a Figura 1.28. Observe que o ponto P é a interseção de um dos lados do ângulo com a circunferência. Denominamos de seno de x a ordenada OP_1 *do ponto P e cosseno de x a abscissa* OP_2 *do ponto P. Assim podemos escrever*

$P = (\overline{OP_1}, \overline{OP_2}) = (\text{sen } x, \cos x)$

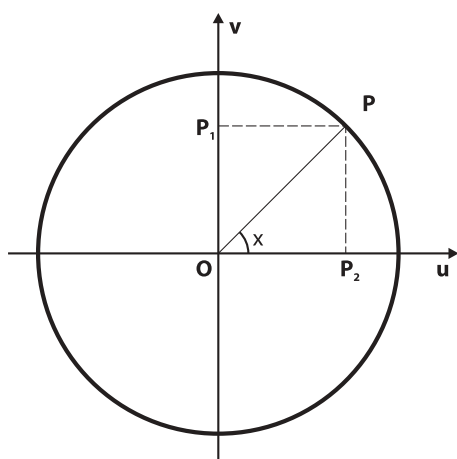



Figura 1.28 Círculo trigonométrico.

x	sen x = OP_1	cos x = OP_2
0	0	1
π/6	0,5	0,866
π/3	0,866	0,5
π/2	1	0
2π/3	0,866	–0,5
5π/6	0,5	–0,866
π	0	–1
7π/6	–0,5	–0,866
4π/3	–0,866	–0,5
3π/2	–1	0
5π/3	–0,866	0,5
11π/6	–0,5	0,866
2π	0	1

É possível variar o valor do *x* para estabelecer o gráfico das funções. Observe o comportamento da função seno e da função cosseno na tabela acima e nos gráficos das Figuras 1.29 e 1.30.

Além do lápis e papel

Para montar tabelas você pode usar os recursos de uma calculadora científica. Pode, também utilizar softwares livres encontrados na Internet. Veja um exemplo em http://www.terravista.pt/enseada/5716/circtrig.htm.

Observe que:

(1) o domínio da função seno é o conjunto dos reais e o conjunto imagem é o conjunto [−1,1];

(2) é periódica de período 2π. Assim, sen (x + 2π) = sen x;

(3) tem intervalos de crescimento e decrescimento.

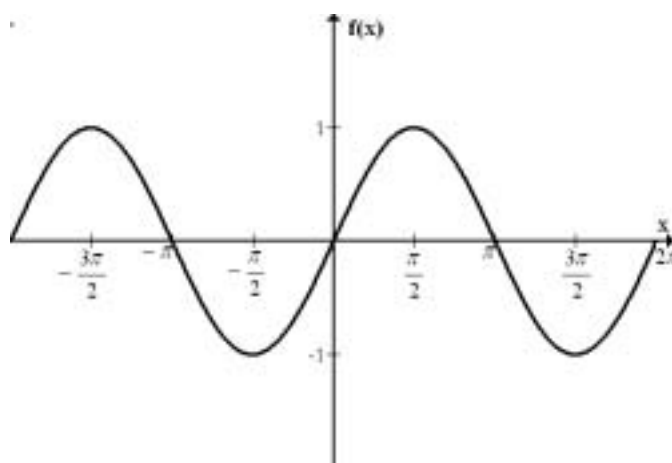



Figura 1.29 Função Seno (senóide)

Observe que:

(1) o domínio da função cosseno é o conjunto dos reais e o conjunto imagem é o conjunto [−1,1];

(2) é periódica de período 2π. Assim, cos (x + 2π) = cos x;

(3) tem intervalos de crescimento e decrescimento.

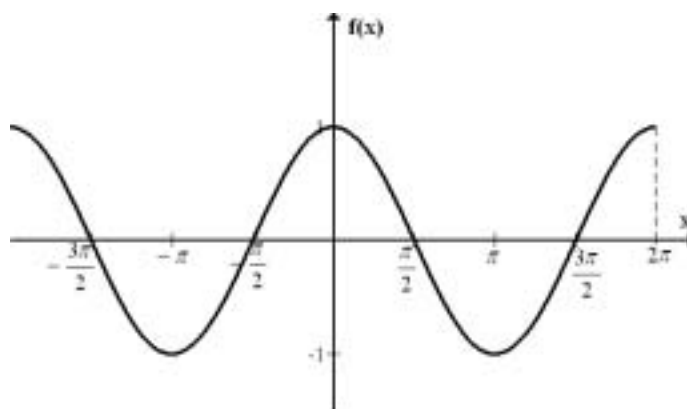



Figura 1.30 Função Cosseno (cossenóide)

Em tempo

Resgatando a questão inicial da unidade: o que é uma função periódica?

Uma função é periódica se existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$. Ao observar o gráfico de uma função periódica você verifica que se repete a cada intervalo de comprimento $|T|$.

Uma característica muito interessante da função seno e da função cosseno está relacionada com a paridade. Para todos os reais vale:

> ***sen x = −sen (−x)*** *e*
> ***cos x = cos (−x)***

Podemos dizer que a função seno é uma função ímpar e a função cosseno é uma função par.

> ***Observação:*** *Uma função f(x) é* ***par****, se para todo x no seu domínio temos f(x)=f(−x). Uma função é* ***ímpar*** *se, para todo x no seu domínio temos f(x)=−f(−x).*

Observe a seguir as demais funções trigonométricas que são definidas em função de seno e cosseno.

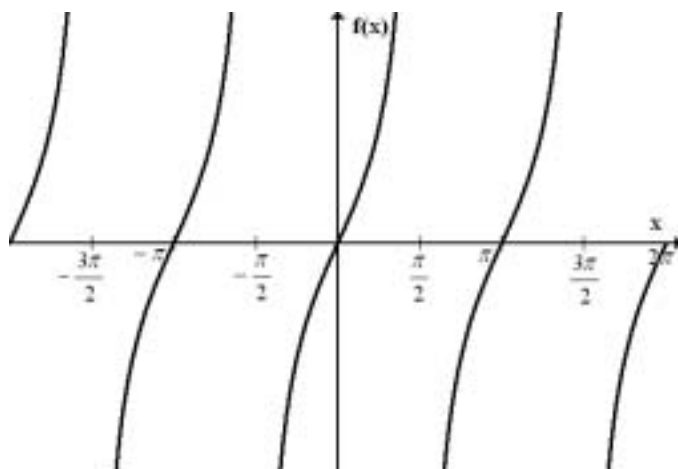



Figura 1.31 Função tangente

Tem-se:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

(1) domínio é o conjunto dos reais para os quais $\cos x \neq 0$;

(2) periódica de período π;

(3) sempre crescente;

(4) função ímpar.

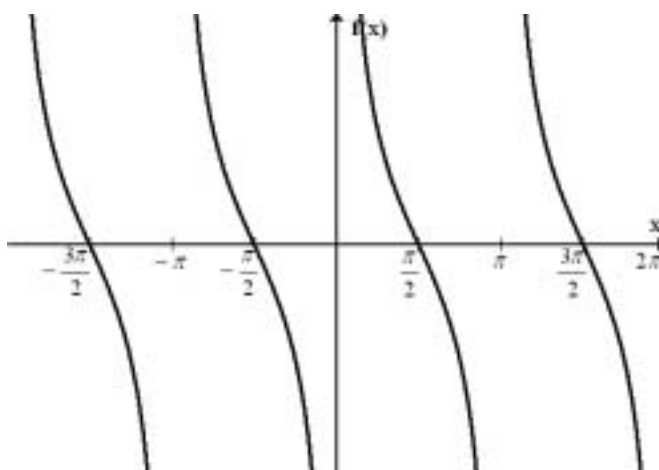



Figura 1.32 Função cotangente

Tem-se:

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

(1) domínio é o conjunto dos reais para os quais $\text{sen } x \neq 0$;

(2) periódica de período π;

(3) sempre decrescente;

(4) função ímpar.

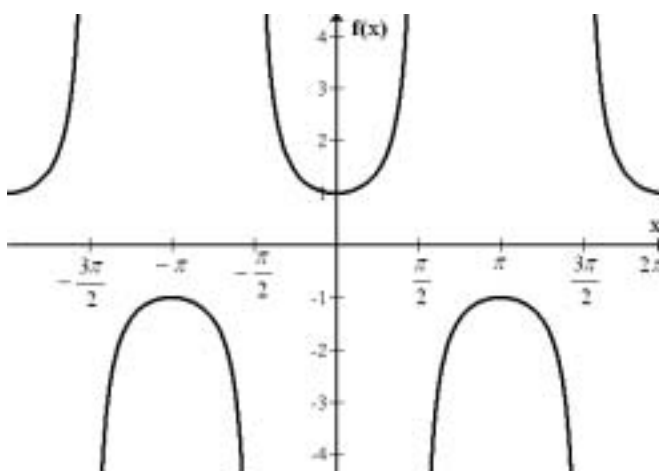



Figura 1.33 Função secante

Tem-se:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

(1) domínio é o conjunto dos reais para os quais $\cos x \neq 0$;

(2) periódica de período 2π.

(3) possui intervalos de crescimento e de decrescimento;

(4) função par.

Tem-se:

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

(1) domínio é o conjunto dos reais para os quais sen $x \neq 0$;

(2) periódica de período 2π;

(3) possui intervalos de crescimento e de decrescimento;

(4) função ímpar.

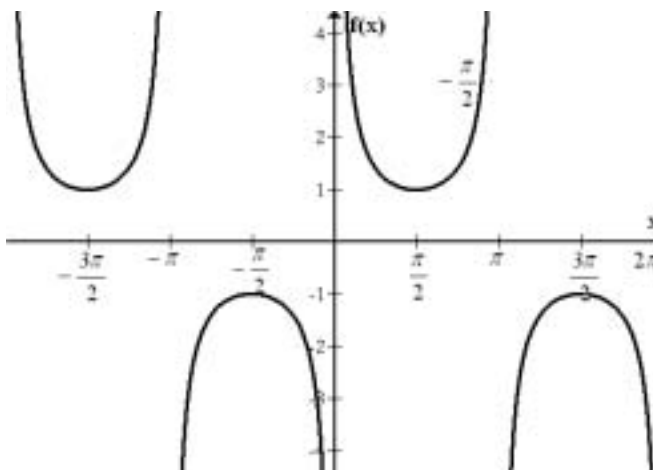



Figura 1.34 Função cossecante

As funções trigonométricas inversas

Você já estudou as funções inversas na seção 4. Agora vai analisar a existência das funções trigonométricas inversas. Vamos lá?

Num olhar inicial pode-se dizer que é impossível definir função inversa para cada uma das funções trigonométricas, pois a cada valor de *y* corresponde uma infinidade de valores de *x*.

Para formalizar a definição das funções inversas é necessário fazer restrição no domínio. Veja como fica inicialmente a inversa da função seno.

Função arco seno

Vamos redefinir a função $f(x) = sen\ x$ para o domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Assim, a função inversa de $f(x)$, será chamada de função arco seno e denotada por $y = arcsen\ x$. Tem-se que para cada $x \in [-1,1]$ corresponde $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, valendo a seguinte equivalência:

$$y = arcsen\ x \Leftrightarrow sen\ y = x$$

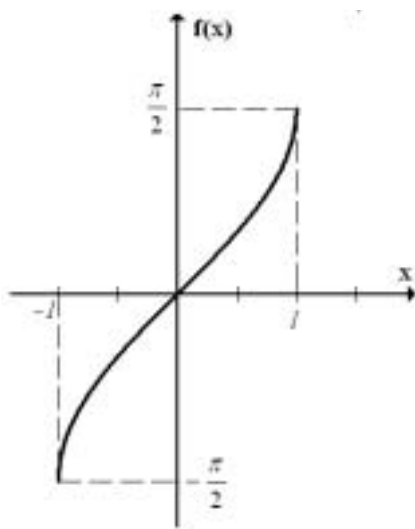
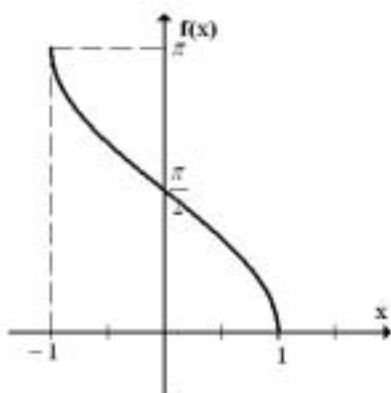
Observe o gráfico da Figura 1.35 para identificar as seguintes características dessa função:

- $D(arcsen\ x) = [-1,1]$;
- $Im(arcsen\ x) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- função sempre crescente.

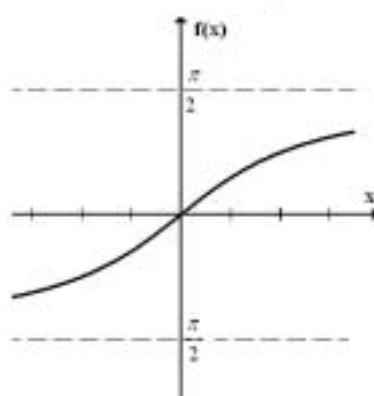
Figura 1.35 Função arco seno

Observe o quadro que segue com as demais funções trigonométricas inversas

Função arco cosseno

Para $0 \leq y \leq \pi$ temos:

$y = arccos\ x \Leftrightarrow x = cos\ y$

Observe que esta função é decrescente em todo o seu domínio.

Figura 1.36 Função arco cosseno

Função arco tangente

Para $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ temos:

$y = arctg\ x \Leftrightarrow x = tg\ y$

Esta função é sempre crescente

Figura 1.37 Função arco tangente

Função arco cotangente
Para $0 \leq y \leq \pi$ a função inversa da
tangente pode ser definida como:

$y = arccotg\, x = {}^{\pi}\!/_{2} - arctg\, x$

Essa função é sempre decrescente, portanto pode ser a forma de um escorregador.

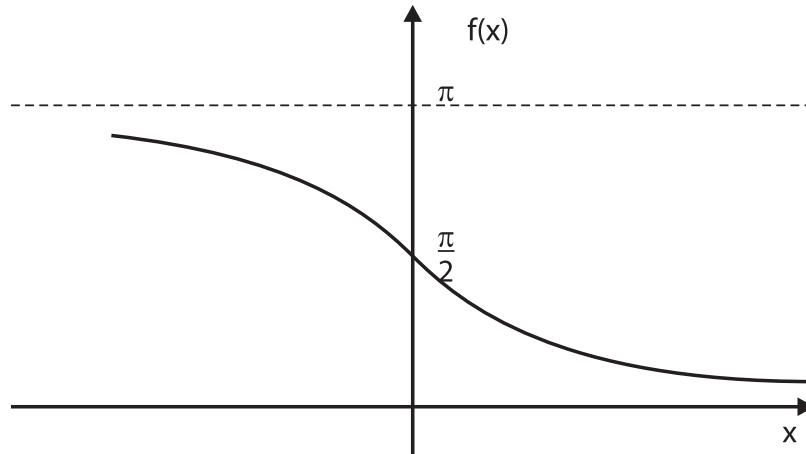



Figura 1.38 Função arco tangente

Função arco secante
Pode-se definir a função arco secante como:

$y = arcsec\, x = arccos\, ({}^{1}\!/_{x})$

Observe que o domínio é dado por valores *x* reais tais que $|x| > 1$.

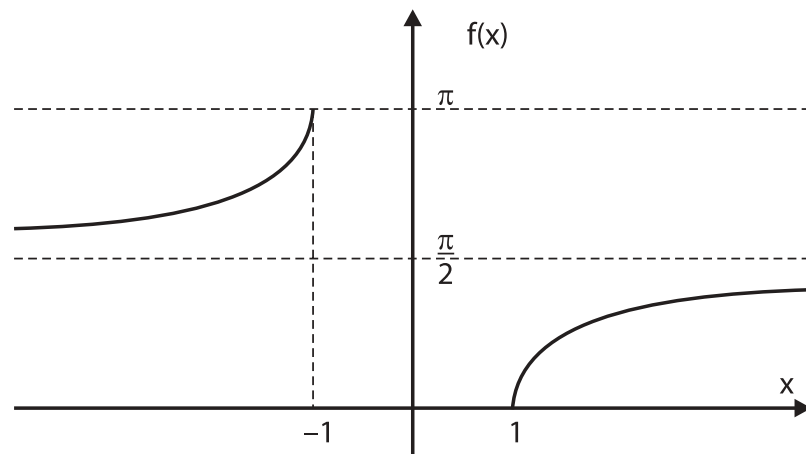



Figura 1.39 Função arco secante

Função arco cossecante
Pode-se definir a função arco secante como:

$y = arccos\, x = arcsen\, ({}^{1}\!/_{x})$

Observe que o domínio é dado por valores *x* reais tais que $|x| > 1$.

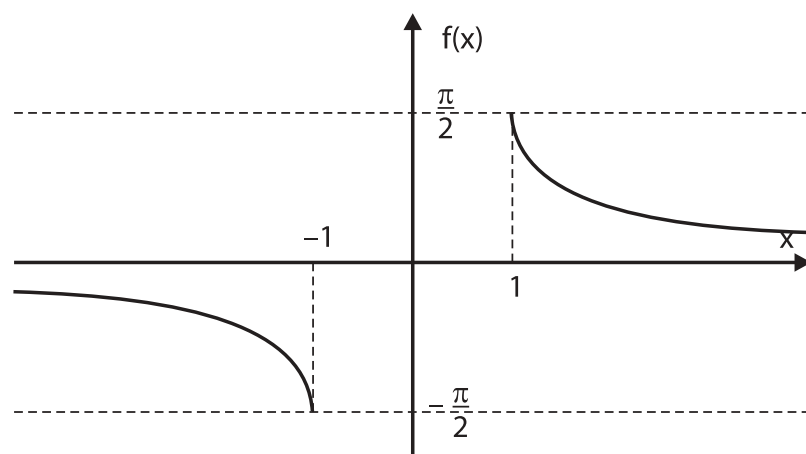
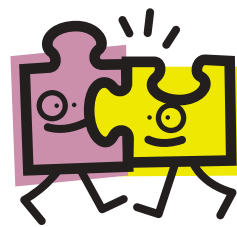



Figura 1.40 Função arco cossecante

Exemplos

1) Usando um *software*, desenvolver o gráfico dos conjuntos de funções dadas e identifique domínio, conjunto imagem e período.

(a) $y = \text{sen } x$; $y = \text{sen } 2x$; $y = \text{sen } 3x$.

> Para resolver esse exercício vamos usar o software Graph 2.6 disponível em http://padowan.dk/graph/. Observe que as figuras podem ser geradas por outro software de sua livre escolha.

Observe as figuras geradas para o intervalo de [–2π,2π].

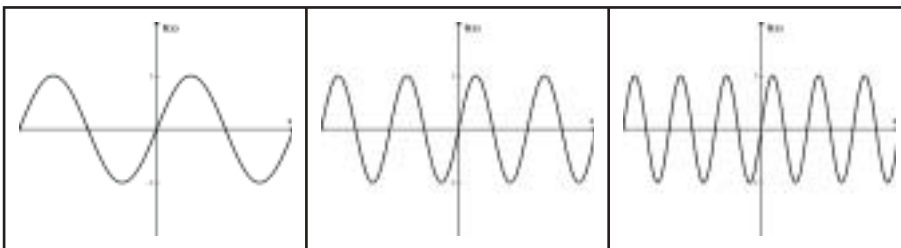



Figura 1.41 Gráficos de $y = \text{sen } x$, $y = \text{sen } 2x$ e $y = \text{sen } 3x$.

Observe que:

- o domínio de todas as funções é o conjunto dos reais;
- o conjunto imagem de todas as funções é o intervalo [–1,1];
- o período da função $y = \text{sen } x$ é 2π; o período da função $y = \text{sen } 2x$ é π e o período da função $y = \text{sen } 3x$ é $2\pi/3$.

Portanto, ao multiplicar o valor de x, da função $y = \text{sen } x$ por um número real vamos observar que o período da função fica 2π dividido por este número.

(b) $y = |\text{sen } x|$

Veja o gráfico gerado no *software* ao colocarmos para variar entre [–2π,2π]. Tem-se que:

- o domínio é o conjunto dos reais;

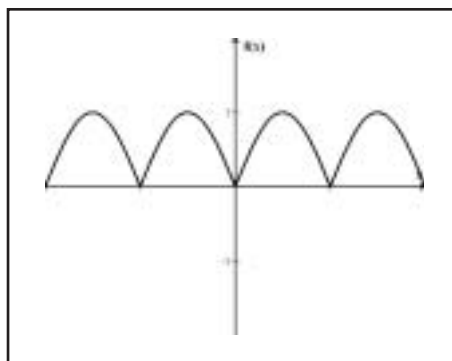
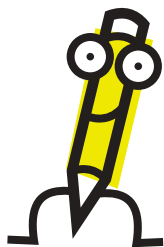



Figura 1.42 Gráfico de $y = |\text{sen } x|$.

- o conjunto imagem é [0,1].
- o período é π

Agora é a sua vez!

1) Faça o gráfico e analise as características e propriedades das funções:

(a) $y = 2 + \text{sen } x$

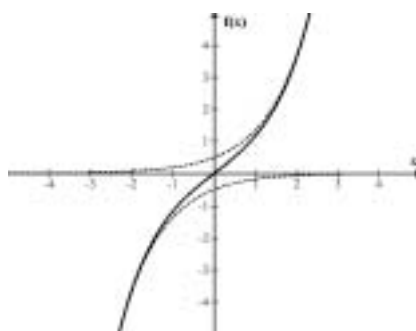
(b) $f(x) = \cos(x/2)$

(c) $g(x) = 2\text{tg}(x)$

SEÇÃO 7

Funções hiperbólicas

Provavelmente este é o seu primeiro contato com as funções hiperbólicas. É uma função simples de extrema importância para a modelagem de vários fenômenos que são estudados em diferentes cursos de Engenharia e Matemática. Por exemplo, podemos citar a forma de um fio flexível suspenso pelas extremidades (veja as linhas de telefone e de energia elétrica nos postes nas ruas); a velocidade de um objeto em um meio resistente com o ar ou água; a difusão de um gás através de uma parede etc.

As funções hiperbólicas são definidas como uma relação entre funções exponenciais. Observe as Figuras 1.43 e 1.44 para visualizar as características das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico respectivamente.

Função seno hiperbólico

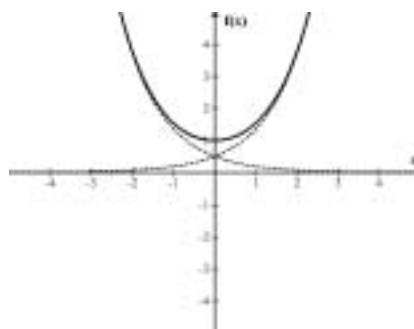
A função seno hiperbólico, denotada por $f(x) = \text{senh}\ x$, é definida por

$$\text{senh}\ x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Observe, no gráfico as linhas pontilhadas que representam as funções exponenciais $y = \frac{1}{2}e^{x}$ e $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ que adicionadas formam a função seno hiperbólico.

Veja:

- $D(\text{senh}\ x) = Im(\text{senh}\ x) = (-\infty, +\infty)$
- Função sempre crescente.

Figura 1.43 Função seno hiperbólico

Função cosseno hiperbólico
A função cosseno hiperbólico, denotada por $f(x) = \cosh x$, é definida por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Observe, no gráfico as linhas pontilhadas que representam as funções exponenciais $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ que adicionadas formam a função cosseno hiperbólico.

Veja:

- $D(\cosh x) = (-\infty, +\infty)$
- $Im(\text{senh } x) = [1, \infty)$
- Função têm intervalos de crescimento e de decrescimento.

Figura 1.44 Função cosseno hiperbólico

Resgatando a questão inicial desta unidade: como modelar os fios de energia elétrica ou telefone visualizados nos postes das ruas?

A forma do fio pode sugerir uma parábola, mas na realidade é uma função hiperbólica. Especificamente tem-se:

$y = a \cosh (x/a)$, sendo a um número real.

Essa curva recebe a denominação de **catenária**.

A catenária é uma curva que deu muita "dor de cabeça" para os matemáticos.

Até o século XVII a modelagem do fio era considerada como uma forma parabólica. Em 1647 um jovem holandês com 17 anos, Christiaan Huygens, provou com argumentos físicos que essa hipótese era falsa, sem, contudo, descobrir a expressão analítica da curva. Simultaneamente surgiram outros trabalhos sobre a catenária. Por exemplo, Bernoulli determinou a forma em 1646, apresentando valiosas contribuições para o entendimento dessa curva.

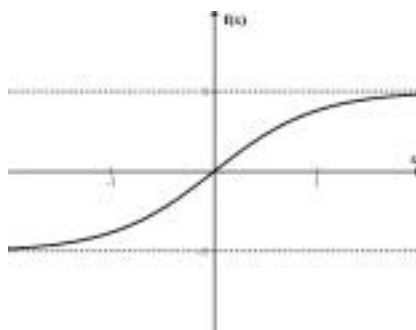
O quadro que segue mostra as figuras das demais funções hiperbólicas.

$$\text{tgh } x = \frac{\text{senh } x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Figura 1.45 Função tangente hiperbólica

$$\text{cotgh } x = \frac{\cosh x}{\text{senh } x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

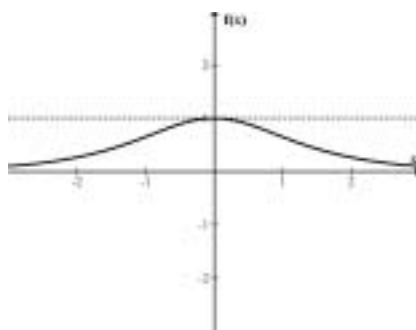
Figura 1.46 Função cotangente hiperbólica

$$\text{sech } x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

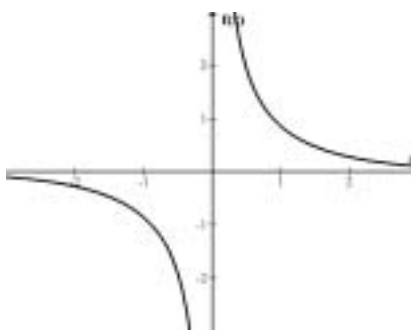
Figura 1.47 Função secante hiperbólica

$$\text{cosech } x = \frac{1}{\text{senh } x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Figura 1.48 Função cossecante hiperbólica

Você deve estar se perguntando:

- *Por que tanta similaridade com as funções trigonométricas?*

Se você observar a Figura 1.49, vai visualizar a resposta para esta pergunta. Temos um raciocínio geométrico, similar ao do círculo trigonométrico, com uma hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

Mas cuidado com o uso dessa similaridade. Observe que a relação fundamental fica com sinal contrário. Temos:

- $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

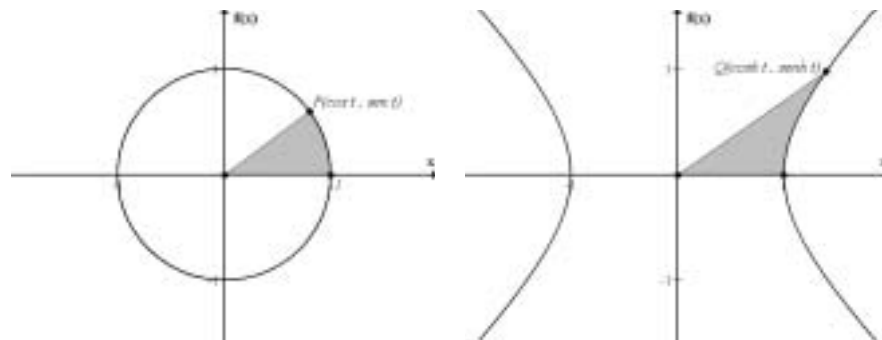



Figura 1.49 Olhar geométrico

Veja como chegar na relação **cosh² x – senh² x = 1**.

Basta usar a definição do cosseno hiperbólico e do seno hiperbólico e fazer as devidas simplificações.

Veja:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x})}{4} = 1$$

$$\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x})}{4} = 1$$

$$\frac{4}{4} = 1$$

$$1 = 1$$

Funções hiperbólicas inversas

Se você observar os gráficos das funções hiperbólicas poderá verificar que as funções hiperbólicas seno, tangente, cotangente e cossecante estão prontas para encontrar as inversas, pois a cada valor de y na imagem corresponde um único x no domínio. Veja no quadro a seguir as definições e os gráficos. Observe que usamos a notação “argumento” para denominar as funções hiperbólicas inversas.

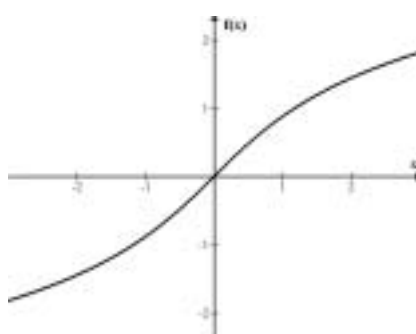
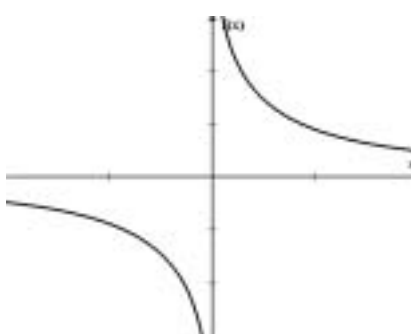
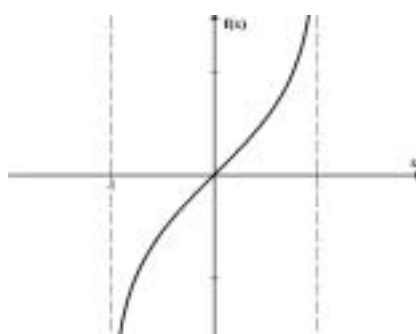
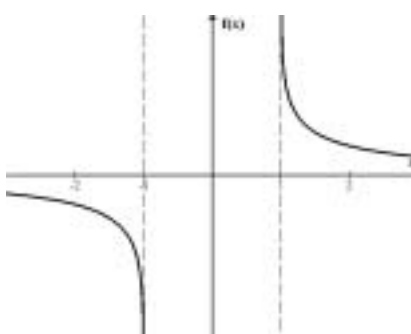
$y = \text{argsenh}\, x \Leftrightarrow x = \text{senh}\, y$

- $D(\text{argsenh}\, x) = Im(\text{argsenh}\, x) = (-\infty,+\infty)$
- Função sempre crescente.

Figura 1.50 Função argumento do seno hiperbólico

$y = \text{argcossech}\, x \Leftrightarrow x = \text{cossech}\, y$

- $D(\text{argcossech}\, x) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$
- $Im(\text{argcossech}\, x) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$
- Função sempre decrescente.

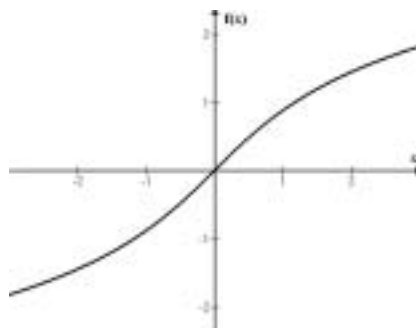
Figura 1.51 Função argumento da cossecante hiperbólica

$y = \text{argtgh}\, x \Leftrightarrow x = \text{tgh}\, y$

- $D(\text{argtgh}\, x) = (-1,1)$
- $Im(\text{argtgh}\, x) = (-\infty,+\infty)$
- Função sempre crescente.

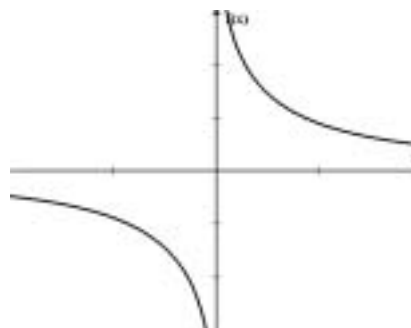
Figura 1.52 Função argumento da tangente hiperbólica

$y = \text{argcotgh}\, x \Leftrightarrow x = \text{cotgh}\, y$

- $D(\text{argcotgh}\, x) = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$
- $Im(\text{argcotgh}\, x) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$
- Função sempre decrescente.

Figura 1.53 Função argumento da cotangente hiperbólica

Para as funções hiperbólicas cosseno e secante vai ser necessário fazer uma restrição no domínio, pois a cada valor de *y* na imagem, exceto *y=1*, correspondem dois valores de *x* no domínio.

$y = \text{argcosh}\, x \Leftrightarrow x = \cosh y$

- $D(\text{argcosh}\, x) = [1,+\infty)$
- $Im(\text{argsenh}\, x) = [0,+\infty)$
- Função sempre crescente.

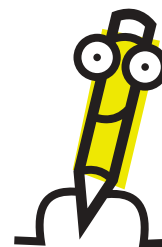
Figura 1.54 Função argumento do cosseno hiperbólico

$y = \text{argsech}\, x \Leftrightarrow x = \text{sech}\, y$

- $D(\text{argsech}\, x) = (0,1]$
- $Im(\text{argsech}\, x) = [0,+\infty)$
- Função sempre decrescente.

Figura 1.55 Função argumento da secante hiperbólica

Para lembrar na frente do computador.

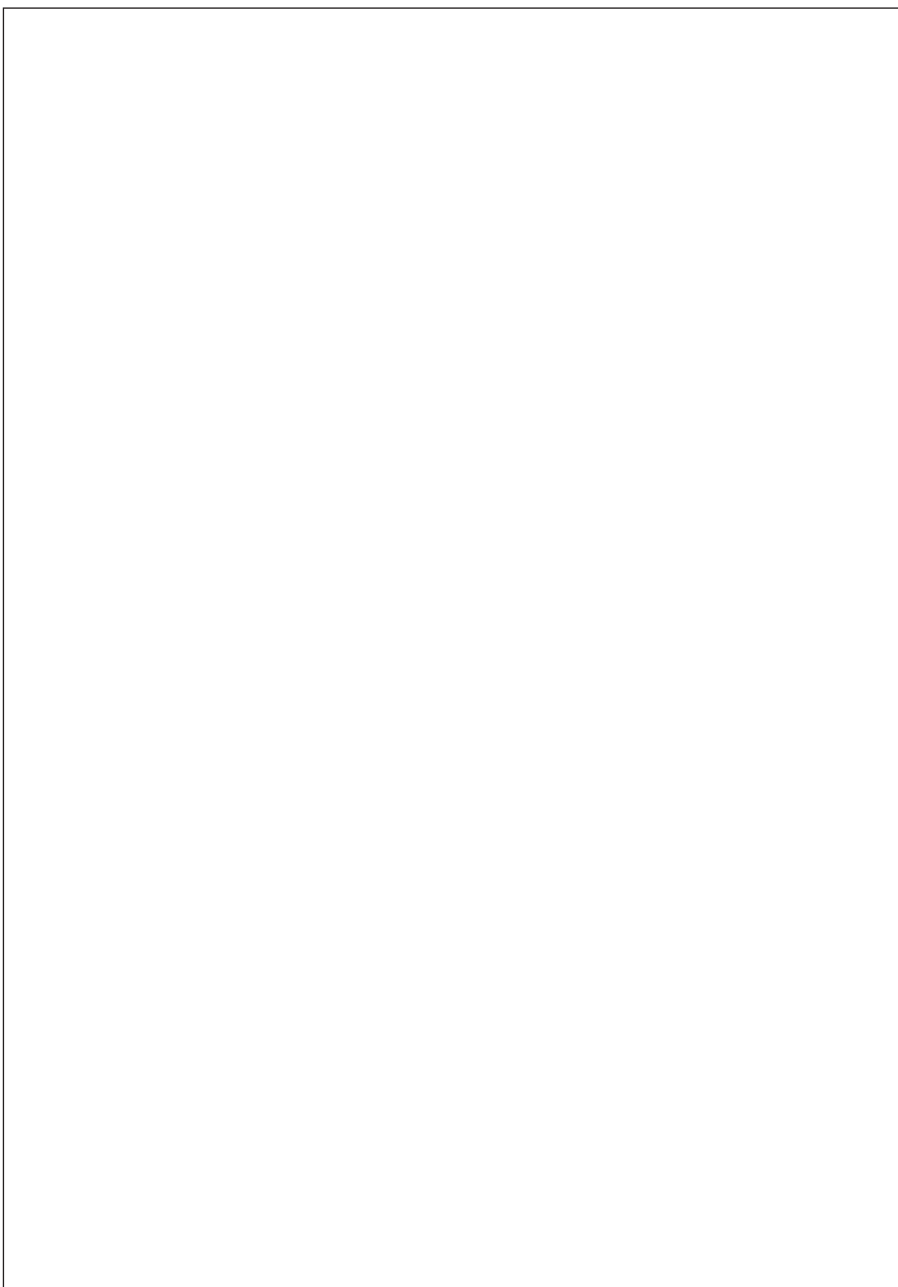
Em geral os *softwares* livres não estão programadas para aceitar as notações de todas as funções hiperbólicas inversas. Assim, é importante que você saiba que existem alternativas para definir essas funções. Você terá a oportunidade de encontrar essas expressões em outros momentos do decorrer do seu curso de Cálculo Diferencial e Integral. Veja:

1. $\text{argsenh}\, x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \quad x$ qualquer;
2. $\text{argcosh}\, x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1;$
3. $\text{argtgh}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad -1 < x < 1;$
4. $\text{argcotgh}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad |x| > 1;$
5. $\text{argsech}\, x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), 0 < x \leq 1;$
6. $\text{argcossech}\, x = \ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \quad x \neq 0.$

Agora é a sua vez!

1) Use um *software* matemático para esboçar o gráfico das seguintes funções hiperbólicas inversas:

(a) $\text{argsenh } x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, x qualquer;

(b) $\text{argtgh } x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $-1 < x < 1$;

(c) $\text{argsech } x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$, $0 < x \leq 1$;

Síntese

Nesta unidade você estudou os conceitos básicos que são importantes para o desenvolvimento dos conteúdos na disciplina de Cálculo I. As funções estão presentes na maioria das situações do nosso dia-a-dia que podem ser modeladas matematicamente. Você pôde ver as propriedades e características das funções elementares utilizando apenas recursos geométricos e algébricos. Nas próximas unidades poderá trabalhar com ferramentas mais "poderosas", tais como limites e derivadas de funções. Perceba que o entendimento sobre as funções, suas principais propriedades e características é muito importante para que você consiga acompanhar os conteúdos que serão trabalhados daqui para frente.

Só prossiga após realizar as atividades de auto-avaliação e sanar as suas dúvidas com o professor tutor!

Bons estudos!

Atividades de auto-avaliação

1) Resolva as equações determinando os valores de x que satisfaçam as igualdades.

(a) $(1 - x)(3 - x) = 0$

(b) $x^3 - \frac{3x^2}{2} = \frac{-1}{2}$

(c) $|2x + 3| = \frac{4}{3}$

2) Resolva as inequações:

(a) $4 - x \geq 6 - 2x$

(b) $\dfrac{x+2}{x-3} > 4$

(c) $(x^2 - 4)(x + 3) \leq 0$

(d) $|3x - 4| \leq 1$

3) Analise as características e propriedades e trace o gráfico das funções:

(a) $y = x^2 + 3x + 2$

(b) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 2x - \dfrac{16}{3}$

(c) $v(t) = 2 - 5t$

(d) $h(x) = 1 + \log x$

(e) $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

(f) $f(x) = \cos 3x$

4) Verifique que a expressão $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ pode ser usada para encontrar a equação de uma reta que passa por dois pontos.

5) No Brasil existem várias regiões em que o transporte de mercadoria e matéria prima é feito com diferentes tipos de embarcações. Um fabricante de um específico produto, a partir de um estudo, afirma que, se cada embarcação transporta x unidades de matéria prima, o custo para obter e depositar o fornecimento anual de matéria prima será $C(x)=6x+\frac{60000}{x}$ reais. Como você pode saber qual o tamanho ótimo da embarcação?

6) Uma agência que aluga veículos possui duas opções para seus clientes: o valor cobrado é de R$ 70,00 a diária com quilometragem livre ou cobra-se R$ 50,00 para cada 200 km rodados. Você consegue identificar qual é a melhor opção para o cliente? É possível modelar essa situação com uma função do primeiro grau?

7) Mostre que a identidade $1 - \text{tgh}^2\, u = \text{sech}^2\, u$ é verdadeira.

Saiba mais

Para aprofundar os seus estudos, recomendamos a leitura do livro Representações Gráficas de autoria de Diva Marília Flemming e Elisa Flemming Luz, editado em 2003 pela Editora Saint Germain. Neste livro, há uma discussão de todas as propriedades e características das funções elementares, utilizando como ponto de partida as representações gráficas e a resolução de problemas práticos.

Vale a pena conferir!

UNIDADE 2

Limite e Continuidade

Objetivos de Aprendizagem

- Entender intuitivamente o conceito de limite;
- Calcular limites usando propriedades;
- Analisar o comportamento de funções próximo a um ponto dado;
- Resolver limites que envolvam indeterminações;
- Calcular limites infinitos e no infinito;
- Analisar a continuidade de uma função.

Seções de estudo

Para início de conversa

Esta unidade tem como principal objetivo estudar o comportamento de uma função $y = f(x)$, próximo de um ponto $x = a$, ou seja, se x aproxima-se de a (x tende a a), o que acontece com os valores de $f(x)$? Ao final desta unidade reflita e perceba que o estudo de limite é importante em muitos problemas matemáticos.

A idéia de limite sempre esteve presente nos avanços do Cálculo Diferencial e Integral. Dois problemas geométricos podem ser considerados motivadores no contexto do estudo do Cálculo: a reta tangente a uma curva e o cálculo de áreas de figuras planas. O primeiro problema você terá contato nesta unidade e o aprofundará nas Unidade 3 e 4, com o estudo das derivadas; já o problema de área terá uma prévia exposta aqui através da área do círculo e o aprofundamento deste estudo se dá na disciplina subseqüente (Cálculo II).

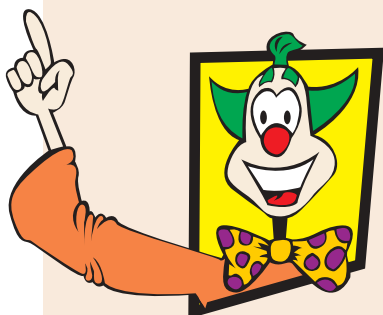
Estes dois problemas requerem como alicerce conceitual o conceito de limite. Na verdade, todos os conceitos envolvidos no

Questões motivadoras

Por que a área de um círculo de raio r é πr^2?

O que significa dizer que x tende para a? x tende para o infinito?

O que é uma indeterminação?

cálculo estão alicerçados no conceito de limite, portanto, será o referencial teórico para o estudo de todos os conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral.

Você já ouviu falar do paradoxo de Zenão? Do maior corredor da Antigüidade que apostou corrida com uma tartaruga?

É muito interessante, acompanhe!

Figura 2.1 Aquiles e a tartaruga

Imagine Aquiles —o maior corredor da Antigüidade— apostando uma corrida com uma tartaruga. É claro que ele deu uma chance posicionando-se um pouco atrás. Veja na Figura 2.1, Aquiles na posição A e a tartaruga na posição B. A regra é caminhar em cada momento a metade do caminho que falta para atingir o objetivo situado em O.

Por incrível que pareça Aquiles nunca vai alcançar a tartaruga. Veja como podemos mostrar essa situação matematicamente.

Considerando que a distância pode ser estabelecida como uma unidade de medida de comprimento e que a distância percorrida em cada passo por $d_1, d_2, \dots, d_n$, então

$$d_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$d_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0{,}75$$

$$d_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0{,}875$$

$$d_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0{,}9375$$

$$d_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 0{,}96875$$

$$d_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = 0{,}984375$$

Nota-se claramente que a cada passo dado, a distância diminui, mas nunca se chegará ao objetivo, a seqüência nos indica que a distância está aproximando-se da distância total a ser percorrida (1 u.c.). Diz-se então que se o número de passos n, cresce muito ou tende ao infinito, Aquiles ou a tartaruga aproximam-se do objetivo O.

A distância entre Aquiles e a tartaruga vai tender para zero mas nunca será zerada.

SEÇÃO 1
Noção intuitiva de limite

A idéia de limite é um conceito simples, dado um ponto *a* e uma função $y = f(x)$, o que acontece com os valores de $f(x)$, quando x se aproxima de *a*, ou ainda, se x cresce muito ou decresce muito, o que acontece com os valores de $f(x)$?

Para responder esta pergunta, veja os seguintes exemplos de seqüências numéricas:

- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$ Note nesta seqüência, que os números aproximam-se cada vez mais de zero. Dizemos que x tende a zero e escrevemos $x \to 0$.

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Nesta seqüência, os números crescem sem limitação, dizemos então que a seqüência tende ao infinito e escrevemos $x \to +\infty$.

Podemos agora discutir o conceito de tendência no contexto das funções.

Exemplos

1) Seja $f(x) = x^2 - x + 1$. O que acontece com os valores de $f(x)$ quando x aproxima-se de 2?

Veja as tabelas abaixo:

x	y
1,5	1,75
1,9	2,71
1,95	2,8525
1,99	2,9701
1,999	2,997001

Note que estamos tomando valores a esquerda de 2, ou seja, valores menores que 2.

x	y
2,5	4,75
2,1	3,31
2,01	3,0301
2,001	3,003001
2,0001	3,00030001

Note que estamos tomando valores a direita de 2, ou seja, valores maiores que 2.

Fica claro, por uma simples análise das tabelas, que, quando x *aproxima-se de 2, tanto pela direita, quanto pela esquerda, os valores de* ***f(x)*** *ficam mais próximos de 3.*

Dizemos que o limite de $x^2 - x + 1$ é 3, quando x tende a 2 e denotamos por

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 1) = 3$$

Podemos perceber esta aproximação através do gráfico de $f(x) = x^2 - x + 1$, representado na Figura 2.2.

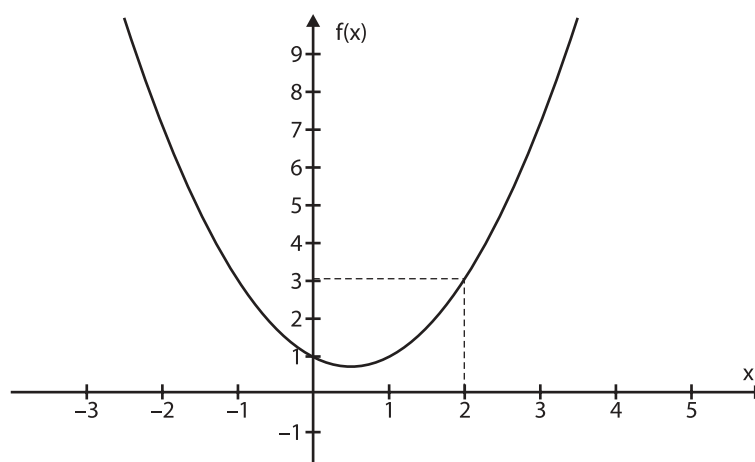



Figura 2.2 Gráfico da função $f(x) = x^2 - x + 1$

2) Considerando a mesma função do item anterior f(x) = $x^2 - x + 1$, agora perguntamos: o que acontece com os valores de f(x), quando x cresce indefinidamente?

Novamente vamos fazer o uso de uma tabela de valores:

x	y
1	1
2	3
5	21
10	91
100	9.901
1000	999.001

Note que a medida que os valores de x crescem, os valores de f(x), crescem cada vez mais.

Dizemos então que quando x tende ao infinito, os valores de f(x) também tendem ao infinito, e escrevemos:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x + 1) = +\infty$$

Dê uma analisada no gráfico da Figura 2.2 e perceba a validade do resultado.

3) Seja f(x) $= \dfrac{1}{x-1}$. Analisar o comportamento de f(x) próximo de $x = 1$.

Veja a análise pela tabela:

x	y
1,5	2
1,1	10
1,01	100
1,001	1.000
1,0001	10.000

Note que quando x tende a 1 pela **direita** os valores de f(x) **crescem** indefinidamente.

Neste caso pode-se dizer que

$$\lim_{x \to 1^+} = \frac{1}{x-1} = +\infty$$

x	y
0,1	−1,11
0,5	−2
0,9	−10
0,99	−100
0,999	−1.000

Note que quando x tende a 1 pela **esquerda** os valores de f(x) **decrescem** indefinidamente.

Neste caso pode-se afirmar que

$$\lim_{x \to 1^-} = \frac{1}{x-1} = -\infty$$

O gráfico apresentado na Figura 2.3 também comprova esta análise.

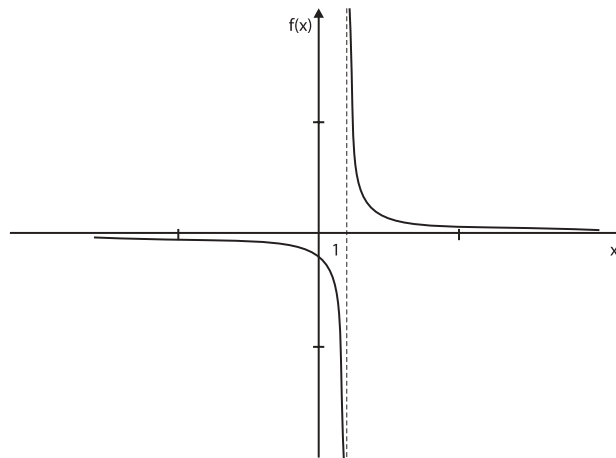



Figura 2.3 Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

> *Observação: Os limites calculados no exemplo 3 são chamados* ***limites laterais****, e serão estudados mais detalhadamente na seção 4.*

4) Analisar o comportamento de $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Fazendo uso das tabelas de valores temos:

x	y
2	1
5	0,25
10	0,111
100	0,0101
1000	0,001001

Note que a medida que x **cresce** indefinidamente os valores de $f(x)$ tendem a **zero**.

Em simbologia de limites escrevemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} = \dfrac{1}{x-1} = 0$

x	y
0	–1
–5	–0,16
–10	–0,0909
–100	–0,009009
–1000	–0,00090009

Note que a medida que x **decresce** indefinidamente os valores de $f(x)$ tendem a **zero**.

Esta análise nos leva a concluir que $\lim\limits_{x \to -\infty} = \dfrac{1}{x-1} = 0$

Veja a Figura 2.3 e comprove esses resultados.

Agora é a sua vez!

1) Calcule os seguintes limites, usando uma tabela de valores. Na tabela deve constar pelo menos 6 valores para x. Se necessário escolha valores para a tendência tanto pela direita como pela esquerda.

(a) $\lim_{x \to 0}(3 - 7x - 5x^2)$	(b) $\lim_{x \to -1}(-3x + 7)$
(c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$	(d) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x + 1}{x^3 - 1}$

Olá, amigos!

Vou fazer uma sugestão para facilitar a resolução dos exercícios propostos. Use uma calculadora ou um *software* para fazer a montagem da tabela. Na Unidade 1 já sugeri o uso do Graph para fazer os gráficos. Este *software* possui também uma ferramenta para fazer a montagem da tabela. Veja menu ***Calc*** e submenu ***Table.***

Bom trabalho!

(e) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+1}{x^3-1}$	(f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - 7x + 2)$
(g) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2 - 7x + 2)$	(h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x-1}{2x+5}$

2) Seja o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ apresentado na Figura 2.4.

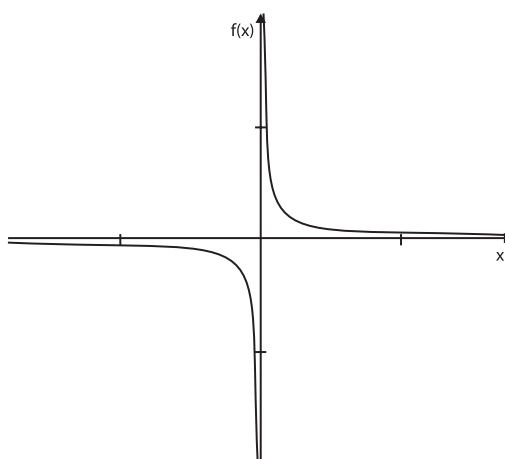



Figura 2.4 Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Apenas analisando o gráfico calcule:

(a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} =$ ☐ (c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} =$ ☐

(b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} =$ ☐ (d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} =$ ☐

3) Considere o gráfico apresentado na Figura 2.5 da seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 2 \\ 2 & x = 2 \\ 9 - x^2 & x > 2 \end{cases}$$

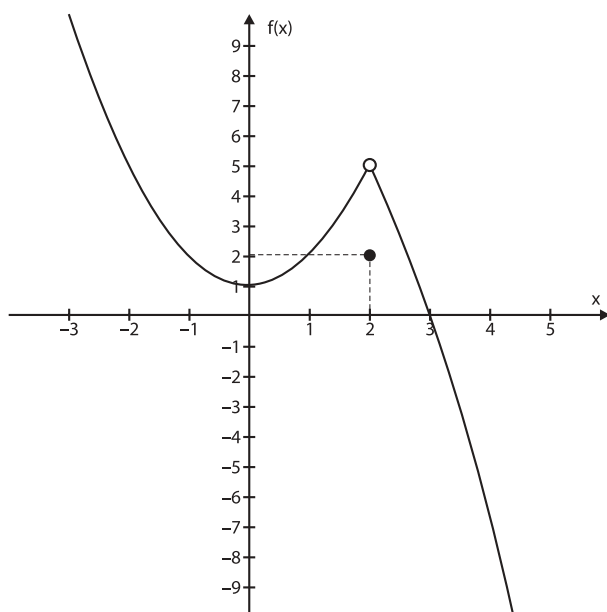



Figura 2.5 Gráfico da função f(x)

Analisando o gráfico resolva os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$ ☐ (c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ ☐

(b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$ ☐ (d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ ☐

SEÇÃO 2

Definição de limite

Vamos discutir a definição formal de limites usando exemplos para facilitar a visualização dos famosos ε e δ.

Analisando o gráfico da função *f(x) = 3x – 1*, na Figura 2.6, e a tabela de valores percebemos que quando *x* tende a 2, os valores de *f(x)* tendem a 5, ou seja

$$\lim_{x \to 2}(3x - 1) = 5$$

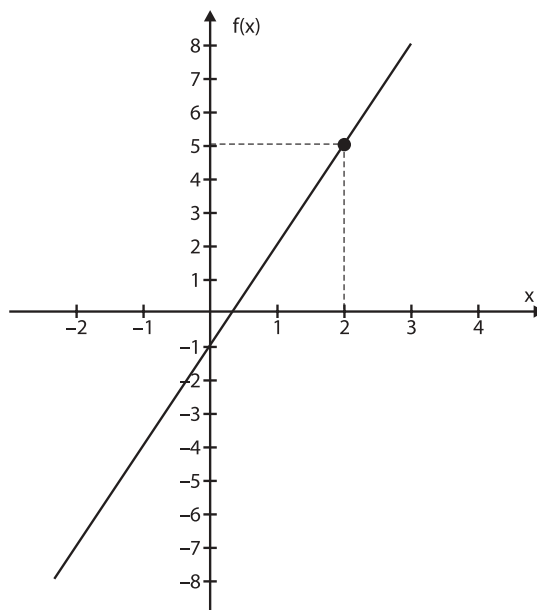



Figura 2.6 Gráfico de f(x) = 3x – 1

x	y
1,5	3,5
1,9	4,7
1,95	4,85
1,99	4,97
1,999	4,997

Valores de x tendendo a 2 pela esquerda.

x	y
2,5	6,5
2,1	5,3
2,05	5,15
2,01	5,03
2,001	5,003

Valores de x tendendo a 2 pela direita.

Note pela tabela de valores que é possível fazer os valores de $f(x)$ ficarem tão próximos de 5 quanto for necessário, desde que os valores de x sejam suficientemente próximos de 2, isto é, o controle dos valores de $f(x)$ em torno de 5, depende do controle dos valores de x em torno de 2.

> ***Observação:*** *Dizer que os valores de $f(x)$ podem estar tão próximos de 5 quanto necessário, significa afirmar que a distância entre os valores de $f(x)$ e 5, podem ficar tão próximos quanto se deseja e representamos a distância por $|f(x) - 5|$.*

Veja na Figura 2.7 a idéia de aproximação salientando os pontos envolvidos. Se x variar 1 unidade em torno de $x = 2$, vamos manter $f(x)$ variando 3 unidades em torno de $y = 5$. Assim, dado $\varepsilon = 3$ existe um $\delta = 1$ tal que a distância $|f(x) - 5| < 3$ sempre que $|x - 2| < 1$.

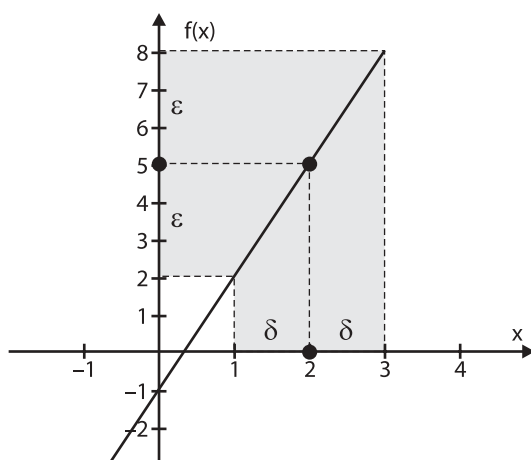



Figura 2.7 Gráfico de $f(x) = 3x - 1$

Continuando com esse exemplo, imagine que a distância entre os valores de $f(x)$ e 5 sejam menores que 0,03, ou seja,

$$|f(x) - 5| < 0{,}03$$

Para que isto ocorra, a que distância os valores de x devem estar de 2?

Como se quer que $|f(x) - 5| < 0{,}03$ e $f(x) = 3x - 1$, então

$$\begin{aligned} |f(x) - 5| &< 0{,}03 \\ |(3x - 1) - 5| &< 0{,}03 \\ |3x - 6| &< 0{,}03 \\ 3|x - 2| &< 0{,}03 \\ |x - 2| &< 0{,}01 \end{aligned}$$

Portanto, deve-se tomar os valores de x de tal maneira que a distância entre x e 2 seja menor que 0,01, para que a distância entre os valores de $f(x)$ e 5 torne-se menor que 0,03. O valor 0,03 é aleatório, pode-se diminuir este valor ainda mais, fazendo com que $f(x)$ torne-se mais próximo de 5, e conseqüentemente ajustar o valor da distância entre x e 2.

Assim, trocando o valor 0,03, por um número qualquer $\varepsilon > 0$, podemos fazer cálculos análogos, ou seja, se

$$|f(x) - 5| < \varepsilon$$

devemos ter

$$\begin{aligned} &|f(x) - 5| < \varepsilon \\ &|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta \end{aligned}$$

Isto é, dizemos que o limite de $3x - 1$, quando x aproxima-se de 2 é 5, se para todo $\varepsilon > 0$, tal que $|f(x) - 5| < \varepsilon$, existe um $\delta > 0$ sempre que $|x - 2| < \delta$. Neste caso $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

> ***Definição:*** *Seja $f(x)$ definida num intervalo I, contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de a é L e escrevemos:*
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Em outras palavras pode-se fazer $f(x)$ tão próximos de L quanto se deseja, desde que tome-se x suficientemente próximos de a.

Exemplos

1) Seja $f(x) = 5x + 6$

(a) Calcular $\lim_{x \to 1} (5x + 6)$ usando uma tabela de valores.

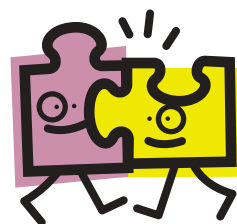
Para calcular o $\lim_{x \to 1} (5x + 6)$ vamos usar a tabela.

x	y
0,5	8,5
0,9	10,5
0,95	10,75
0,99	10,95
0,999	10,995

Valores de x tendendo a 1 pela esquerda.

x	y
1,5	13,5
1,1	11,5
1,05	11,25
1,01	11,05
1,001	11,005

Valores de x tendendo a 1 pela direita.

Assim $\lim_{x \to 1} (5x + 6) = 11$.

(b) Se quisermos que a distância entre f(x) e 11 seja menor que 0,01, qual a distância entre os valores de x e 1?

Ora, queremos que

$$| f(x) - 11| < 0{,}01$$

$$|(5x + 6) - 11| < 0{,}01$$

$$|5x - 5| < 0{,}01$$

$$5|x - 1| < 0{,}01$$

$$|x - 1| < 0{,}002$$

Assim, a distância entre x e 1 é 0,002 para $\varepsilon = 0{,}01$.

(c) Mostrar que $\lim\limits_{x \to 1} 5x + 6 = 11$, usando a definição.

Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que se $| f(x) - 11| < \varepsilon$, então $|x - 1| < \delta$.

$$| f(x) - 11| < \varepsilon$$

$$|(5x + 6) - 11| < \varepsilon$$

$$|5x - 5| < \varepsilon$$

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta$$

Para qualquer valor de $\varepsilon > 0$, devemos tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, para que $\lim\limits_{x \to 1} 5x + 6 = 11$.

2) Mostre usando a definição que $\lim\limits_{x \to 3} (5x - 8) = 7$.

Queremos que dado $\varepsilon > 0$, exista um $\delta > 0$, tal que se $|f(x) - 7| < \varepsilon$, então $0 < |x - 3| < \delta$. Devemos encontrar δ. Portanto,

$$| f(x) - 7| < \varepsilon$$

$$|(5x - 8) - 7| < \varepsilon$$

$$|5x - 15| < \varepsilon$$

$$5|x - 3| < \varepsilon$$

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta$$

Basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, para que o limite exista.

3) Sabendo que $\lim_{x\to 1}(2x+6)=8$ e $\varepsilon = 0{,}02$ encontrar o valor de δ.

Temos

$$|f(x)-8| < 0{,}02$$

$$|(2x+6)-8| < 0{,}02$$

$$|2x-2| < 0{,}02$$

$$2|x-1| < 0{,}02$$

$$|x-1| < 0{,}01$$

Logo $\delta = 0{,}01$, para que $|(2x+6)-8| < 0{,}02$

4) Determinar δ para que $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2} = -4$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

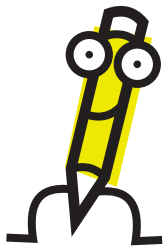
Temos então que

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right| < 0{,}1$$

$$\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}+4\right| < 0{,}1$$

$$|x-2+4| < 0{,}1$$

$$|x+2| < 0{,}1 = \delta$$

Ou seja $\delta = \varepsilon = 0{,}01$, para que $\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right| < 0{,}1$.

Agora é a sua vez!

1) Mostre que $\lim_{x \to 4} (7x - 1) = 27$, usando a definição.

2) Sabendo que $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Determine $\delta > 0$, para ε dado tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

(a) $\lim_{x \to 4} (x + 4) = 8$, $\varepsilon = 0{,}1$

(b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$, $\varepsilon = 0{,}005$

(c) $\lim_{x \to 2} (-3x + 2) = -4$, $\varepsilon = 0{,}02$

SEÇÃO 3

Propriedades de limite

Nas seções anteriores, você teve a oportunidade de entender o comportamento de uma função *f(x)* próximo de um ponto *a*. Utilizou, para isso, de algumas maneiras de estudar este comportamento, tais como, tabela de valores, gráfico da função *f(x)*, ou mesmo a definição usando ε e δ. Todos os métodos são bastante eficientes, mas um tanto cansativos.

Nesta seção você estudará as propriedades operatórias de limite, que o ajudará a simplificar os cálculos de limites sem o uso das ferramentas das seções anteriores.

O primeiro resultado a ser apresentado, é o teorema da unicidade, cuja demonstração será omitida.

Teorema da Unicidade

Teorema: Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ *e* $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, *então* $L_1 = L_2$

Em outras palavras, este resultado nos diz que o valor do limite de uma função *f(x)*, quando *x* tende a *a* é único, isto é, não existem dois valores para um mesmo limite.

Propriedades de Limite

Aqui você terá contato com as principais propriedades operatórias de limite, que o ajudará a encontrar o valor de um limite sem a necessidade do uso de ε e δ.

Propriedade 1

Seja α, β e a números reais, então

- $\lim_{x \to a} (\alpha x + \beta) = \alpha \cdot a + \beta$

Aqui amigo, vou demonstrar que esta propriedade 1 é realmente verdadeira.

1° Caso: $\alpha \neq 0$

Usando a definição, dado $\varepsilon > 0$, deve-se encontrar $\delta > 0$, tal que $|(\alpha \cdot x + \beta) - (\alpha \cdot a + \beta)| < \varepsilon$, sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Portanto,

$$|(\alpha \cdot x + \beta) - (\alpha \cdot a + \beta)| < \varepsilon$$

$$|\alpha \cdot x - \alpha \cdot a| < \varepsilon$$

$$|\alpha||x - a| < \varepsilon$$

$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \delta.$$

De fato, se $\delta = \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$, tem-se

$$|(\alpha \cdot x + \beta) - (\alpha \cdot a + \beta)| = |\alpha||x - a| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$$

Sempre que $0 < |x - a| < \delta = \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$

Logo,

$$\lim_{x \to a} \alpha \cdot x + \beta = \alpha \cdot a + \beta.$$

2° Caso: $\alpha = 0$

Neste caso, tem-se que $|(\alpha \cdot x + \beta) - (\alpha \cdot a + \beta)| = 0 < \varepsilon$, logo qualquer $\delta > 0$, satisfaz a definição de limite.

Exemplo da propriedade 1

Calcular $\lim_{x \to 3} (5x + 6)$

Usando a propriedade 1 temos que:

- $\lim_{x \to 3} (5x + 6) = 5 \cdot 3 + 6 = 21$

Propriedade 2

Seja c um número real, então temos que

- $\lim_{x \to a} c = c$ e $\lim_{x \to a} x = a$

Para as próximas propriedades, considere que $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem e c é um número real qualquer.

Propriedade 3

- $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

Isto quer dizer que o limite da soma (diferença) é igual a soma (diferença) dos limites. Esta propriedade é válida também para um soma (diferença) de duas ou mais funções.

Propriedade 4

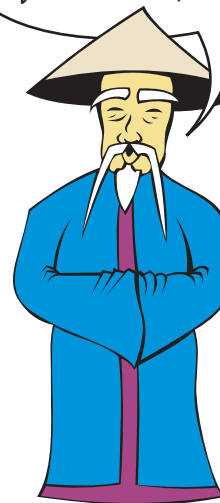
- $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$

Exemplo da propriedade 4

Calcular $\lim_{x \to 0} (3x + 5)$

Usando as propriedades 3 e 4, temos:

- $\lim_{x \to 0} (3x + 5) = \lim_{x \to 0} 3x + \lim_{x \to 0} 5 = 3 \cdot \lim_{x \to 0} x + \lim_{x \to 0} 5 = 3 \cdot 0 + 5 = 5$

Note que poderíamos ter usado diretamente a propriedade 1.

Como quase tudo na matemática deve ser demonstrado para ser verdadeiro, vamos fazer uma pequena demonstração.

Suponha $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$, ou seja, deve-se mostrar que $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$

Então dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ temos que dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$.

Da mesma forma como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ temos que dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$.

Note que ao invés de tomarmos $\varepsilon > 0$, consideramos $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Isto você pode fazer sempre, já que ε é um número arbitrário. Neste caso usamos desta maneira apenas para deixar a demonstração mais "elegante". Veja o por quê ao final da demonstração.

Tome agora $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ou seja, δ é o menor dos números δ_1 e δ_2, logo $\delta \le \delta_1$ e $\delta \le \delta_2$, e portanto se $0 < |x - a| < \delta$, segue que $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, e então

$$
\begin{aligned}
|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| &= |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \\
&\le |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tal que $|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Assim, $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$

Propriedade 5

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Esta propriedade coloca que o limite do produto é o produto dos limites. Esta propriedade é válida também se tivermos o produto de duas ou mais funções.

Exemplo da propriedade 5

Calcular $\lim_{x \to -2} x(x-6)$

Usando a propriedade 5, temos:

$$\lim_{x \to -2} x(x-6) = \lim_{x \to -2} x \cdot \lim_{x \to -2} (x-6) = -2 \cdot (-2-6) = 16$$

Propriedade 6

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \textit{ Sempre que } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Dizemos que o limite do quociente é o quociente dos limites.

Exemplo da propriedade 6

Calcular $\lim_{x \to 2} \frac{x+5}{x-1}$

Podemos usar a propriedade 6, pois o limite do denominador é diferente de zero.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+5}{x-1} = \frac{\lim_{x \to 2}(x+5)}{\lim_{x \to 2}(x-1)} = \frac{2+5}{2-1} = 7$$

Propriedade 7

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$

Exemplos da propriedade 7

1) Calcular $\lim_{x\to 1} (x^3 - 3x^2 + 6x - 1)$

Aqui vamos usar as propriedades 2, 3, 4 e 7.

$$\lim_{x\to 1} (x^3 - 3x^2 + 6x - 1) = \lim_{x\to 1} x^3 - 3\lim_{x\to 1} x^2 + 6\lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 1$$

$$= 1^3 - 3\cdot 1^2 + 6\cdot 1 - 1 = 3$$

2) Calcular $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$.

Note que aqui não podemos usar a propriedade do quociente, pois $\lim_{x\to 1} (x^2 - 1) = 0$, neste caso, fazemos uma fatoração do denominador.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)\cdot(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 1} 1}{\lim_{x\to 1}(x+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Propriedade 8

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}, \textit{ se}$$

$\lim_{x\to a} f(x) > 0$ *e n inteiro ou* $\lim_{x\to a} f(x) < 0$ *e n inteiro impar.*

Exemplo da propriedade 8

Calcular $\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

Podemos usar a propriedade 8.

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{\lim_{x\to 3}(x^2 - 2x + 1)} = \sqrt{9 - 6 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

Propriedade 9

$$\lim_{x \to a} \ln[f(x)] = \ln[\lim_{x \to a} f(x)], \text{ se } \lim_{x \to a} f(x) > 0$$

Exemplo da propriedade 9

Calcular $\lim_{x \to 0} \ln(x^2 + 2x + 1)$

Usando a propriedade 9, temos que

$$\lim_{x \to 0} \ln(x^2 + 2x + 1) = \ln[\lim_{x \to 0} (x^2 + 2x + 1)] = \ln(0^2 + 2 \cdot 0 + 1) = \ln 1 = 0$$

Propriedade 10

$$\lim_{x \to a} \cos[f(x)] = \cos[\lim_{x \to a} f(x)]$$

Exemplo da propriedade 10

Calcular $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Usando a propriedade 10, temos que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi = -1$$

Propriedade 11

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen}[f(x)] = \operatorname{sen}[\lim_{x \to a} f(x)]$$

Exemplo da propriedade 11

Calcular $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x^2 + 2x + \pi)$

Podemos usar a propriedade 11, e então temos

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x^2 + 2x + \pi) = \operatorname{sen}[\lim_{x \to 0} (x^2 + 2x + \pi)] =$$
$$= \operatorname{sen}(0 + 0 + \pi) = \operatorname{sen} \pi = 0$$

Propriedade 12

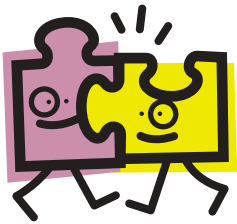
$$\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Exemplo da propriedade 12

Calcular $\lim_{x \to -1} e^{x^5 + 2x^2 - x + 3}$

Podemos aqui usar a propriedade 12.

$$\lim_{x \to -1} e^{x^5 + 2x^2 - x + 3} = e^{\lim_{x \to -1} x^5 + 2x^2 - x + 3} = e^{(-1)^5 + 2(-1)^2 - (-1) + 3} = e^{-1+2+1+3} = e^5$$

> ***Observação:*** *Note que todos os limites dos exemplos anteriores podem ser calculados diretamente sem a necessidade de usar todo o detalhamento das propriedades.*

Exemplos

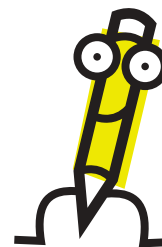
Para determinar os limites dados basta calcular a imagem da função. Isto deve ser feito com alguns cuidados, pois precisamos respeitar as condições da aplicabilidade das propriedades. Na seção 7 vamos discutir as funções contínuas e então voltamos à esse tema.

1) $\lim_{x \to -2} \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 1} = \sqrt{9} = 3$

2) $\lim_{x \to 0} \cos(x^3 - 2x) = \cos(0^3 - 2 \cdot 0) = \cos 0 = 1$

3) $\lim_{x \to -3} (5 - x + x^2) = 5 - (-3) + (-3)^2 = 17$

Agora é a sua vez!

Calcular os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to -3} (x^2 - 6x + 1)$	(b) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$
(c) $\lim_{x \to 0} (x+5)^{1/x}$	(d) $\lim_{x \to 0} (2\text{sen}\, x - 5\cos x + \text{tg}\, x)$
(e) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 1)^5 (x - 3)^3$	(f) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

(g) $\lim_{x \to 0} (e^x + 1)$	(h) $\lim_{x \to \frac{1}{3}} (7x - 8)$
(i) $\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{x^2 - 1}$	(j) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5}{x + 7}$

SEÇÃO 4

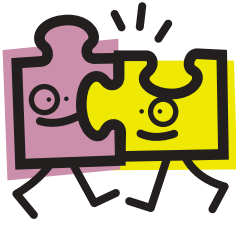
Limites laterais e cálculo de limites

Na seção 1, quando tratamos do cálculo de limites de maneira intuitiva, já foi feita uma observação sobre limites laterais, que nada mais é, do que o cálculo de limite a esquerda e direita de um ponto *a*.

Assim, $x \to a^+$, significa *x* tendendo a *a* pela direita, ou seja, toma-se valores de *x* maiores que *a*, e $x \to a^-$, significa *x* tendendo a *a* pela esquerda, ou seja, toma-se valores de *x* menores que *a*.

Nesta seção, este conceito será formalizado, além de tratarmos do cálculo de limites com indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Limites Laterais

Para tratar dos limites laterais, já tendo clara a notação que foi apresentada na seção 1, é importante que você acompanhe a seguir alguns exemplos.

Exemplos

1) Seja f(x) = $x + |x - 4|$. Determinar se possível, $\lim_{x \to 4^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 4^-} f(x)$.

Antes lembre-se:

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & ; \ x \geq 4 \\ -(x-4) & ; \ x < 4 \end{cases}$$

Assim,

$$\lim_{x \to 4^+} (x + |x-4|) = \lim_{x \to 4^+} x + x - 4 = \lim_{x \to 4^+} 2x - 4 = 4$$

$$\lim_{x \to 4^-} (x + |x-4|) = \lim_{x \to 4^-} x - (x-4) = \lim_{x \to 4^-} 4 = 4$$

A Figura 2.8 ilustra este exemplo.

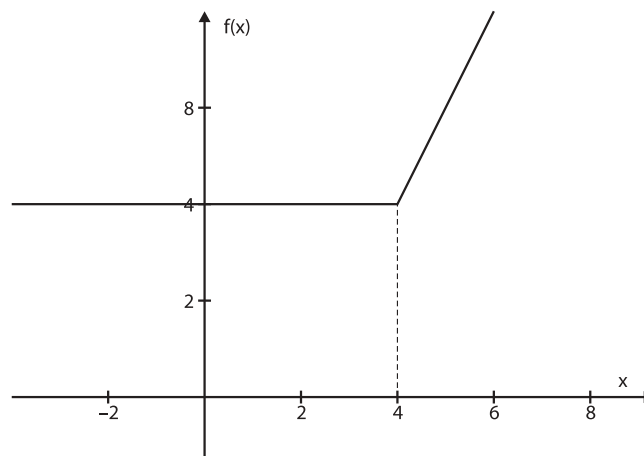



Figura 2.8 Gráfico da função f(x) = $x + |x - 4|$

2) Seja $f(x) = \sqrt{x-2}$, determinar se possível $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

Vamos calcular, inicialmente $\lim_{x \to 2^+} f(x)$:

$$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{x-2} = \sqrt{2-2} = 0$$

Já o $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{x-2}$, não é possível calcular pois $f(x) = \sqrt{x-2}$, não está definida para $x < 2$.

3) Seja $f(x) = |x|$. Determine $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

Lembre-se:

$$|x| = \begin{cases} x & ; \ x \geq 0 \\ -x & ; \ x < 0 \end{cases}$$

Então,

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$$

O próximo resultado relaciona os limites laterais e limite de uma função.

Teorema (Limites Laterais): *O limite de uma função existe em um ponto a, se e somente se, existirem os limites laterais no mesmo ponto a e tiverem o mesmo valor, ou seja,*

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, *se e somente se,* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

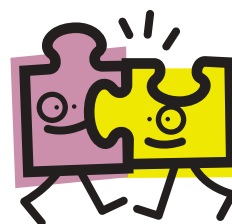
Analisando os exemplos anteriores, de acordo com o teorema dos limites laterais, pode-se concluir que:

- $\lim\limits_{x \to 4}(x + |x - 4|) = 4$, pois os limites laterais são iguais a quatro.
- $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, pois $\lim\limits_{x \to 0^+} |x| = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} |x|$.

Exemplos

Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ x \leq 0 \\ x + 2 & ; \ x > 0 \end{cases}$$

Verificar se existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Para resolver este exercício necessitamos calcular $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

- Se $x \to 0^-$, então $x < 0$ e portanto $f(x) = x^2$,
  logo $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0^2 = 0$
- Se $x \to 0^+$, então $x > 0$ e portanto $f(x) = x + 2$,
  logo $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 2) = 0 + 2 = 2$

Como os limites laterais são diferentes, segue pelo teorema dos limites laterais que $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe.

Cálculo de Limites

No cálculo de limites é usual ficarmos diante de indeterminações.

Mas afinal, o que é uma indeterminação?

Considere $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, qual o resultado?

Usando as propriedades, tem-se:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

A primeira dedução que se tira precipitadamente é que $\frac{0}{0} = 0$, o que não é verdade.

Neste caso apresentado, a substituição direta não deve ser feita, pois de acordo com a propriedade 6 de limites, o limite do denominador deve ser diferente de zero, o que não é o caso. Necessita-se então de uma fatoração:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Perceba que $\frac{0}{0}$ pode ser qualquer coisa, neste caso específico valeu 2, este tipo de expressão é chamada de **indeterminação**. A seguir, alguns exemplos mostram outras situações.

Exemplos

1) Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2-7x+10}{x^2+2x-3}$

Aplicando diretamente, perceba que temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

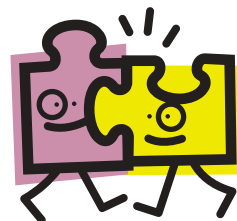
Necessitamos de uma fatoração tanto do numerador, quanto do denominador. Para fazer a fatoração podemos usar o método de Briot-Ruffini, discutido na Unidade 1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2-7x+10}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-3x-10)}{(x-1)(x+3)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x-10}{x+3}=\frac{1-3-10}{4}=-\frac{12}{4}=-3$$

Observação: Sempre que estamos diante de um limite com $x \to a$, que resulte a indeterminação $\frac{0}{0}$ e a função dada é do tipo racional ($f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ com $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios em x) é possível fazer uma simplificação, pois os polinômios serão divisíveis por $(x-a)$.

2) Calcular $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}$

Novamente temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Para este exemplo, usamos a racionalização do numerador, ou seja, multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado.

O conjugado de $\sqrt{x+12}-4$ é $\sqrt{x+12}+4$. Assim,

Em tempo

O conjugado de uma expressão do tipo $\sqrt{x+a}+b$ é dado por $\sqrt{x+a}-b$

O que se faz é a troca do sinal entre os termos da expressão.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x+12}-4)(\sqrt{x+12}+4)}{(x-4)(\sqrt{x+12}+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x+12})^2-4^2}{(x-4)(\sqrt{x+12}+4)}=$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{x+12-16}{(x-4)(\sqrt{x+12}+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+12}+4)}=$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(\sqrt{x+12}+4)}=\frac{1}{\sqrt{4+12}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

3) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)^2-4}{x}$.

Mais uma vez estamos diante de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Neste caso o que fazemos é desenvolver o produto notável para simplificar a expressão.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)^2-4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x+4-4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+4)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+4)=0+4=4$$

Veja que legal este exemplo!

Estamos diante da função $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

A função oscila de ambos os lados do zero. Portanto, não existe limite lateral à direita nem à esquerda do zero.

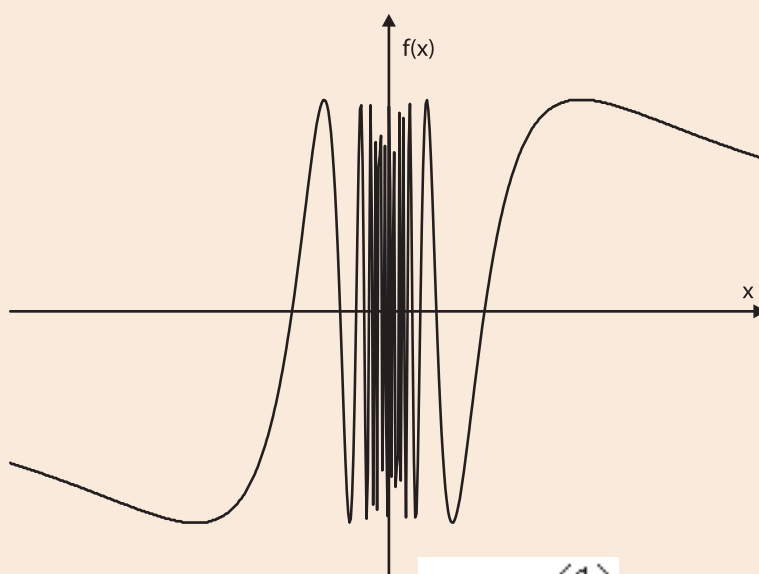
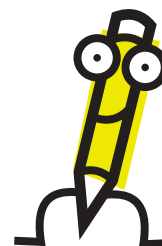



Figura 2.9 *Gráfico da função* $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Agora é a sua vez!

1) Calcule $\lim_{x \to 3} f(x)$, para $f(x)=\begin{cases} x^2-5 & ; x \leq 3 \\ \sqrt{x+13} & ; x > 3 \end{cases}$

2) Seja $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

Calcule $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$, e $\lim_{x \to 0} f(x)$ se existirem.

3) Calcule os seguintes limites.

(a) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$	(b) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$	(d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$
(e) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$	(f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+3)^2-9}{x}$
(g) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-8x+15}{x(x-5)}$	(h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)^4-1}{x}$

SEÇÃO 5

Limite no infinito e limites infinitos

Considere uma das questões motivadoras do início desta unidade.

Por que a área de um círculo de raio r é πr^2?

Veja que a área do círculo já é conhecida na Geometria, usada desde o Ensino Fundamental, e é igual a πr^2.

Veja um pouco de história envolvendo limites.

Em 1784 a academia de Ciências de Berlim ofereceu um prêmio para quem pudesse explicar uma teoria do infinito pequeno e do infinito grande, que pudesse ser usada no cálculo como um fundamento lógico e consistente.

O prêmio foi dado a Simon L`Huilier (1750-1840) por um trabalho que não foi considerado a solução para os problemas propostos.

Foi Lazare N. M. Carnot (1753-1823) quem propôs uma explicação para o papel do limite no cálculo como "a compensação dos erros". No entanto, não explicou como estes erros se balançariam sempre perfeitamente.

Pois é amigo, os limites são realmente importantes, veja a demonstração da área do círculo usando a idéia de limites.

Considere uma circunferência de raio *r* e um polígono regular de *n* lados, inscrito na circunferência. A Figura 2.10 representa esta circunferência.

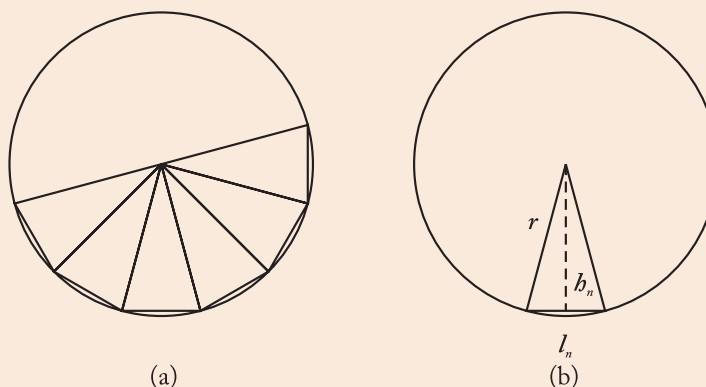



Figura 2.10 Polígono de *n* lados inscrito na circunferência de raio *r*.

Seja A_n a área do polígono P_n. Dividimos o polígono P_n em n triângulos de base l_n e altura h_n. A área destes triângulos é dada por

$$A_{Tn} = \frac{l_n \cdot h_n}{2}$$

Portanto a área do polígono P_n é dada por:

$$A_n = n \cdot A_{Tn} = n \cdot \frac{l_n \cdot h_n}{2}$$

Mas $n \cdot l_n$ é o perímetro do polígono e o denotamos por P_n, logo

$$A_n = \frac{P_n \cdot h_n}{2}$$

Note que, a medida em que o número de lados do polígono P_n aumenta, mais a área de P_n aproxima-se da área do círculo.

Fazemos *n* tender ao infinito, ou $n \to +\infty$, neste caso P_n aproxima-se de $2\pi r$ (comprimento da circunferência) e h_n aproxima-se do raio, então a área do círculo é dada por:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \frac{P_n \cdot h_n}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n \to +\infty} P_n \cdot \lim_{n \to +\infty} h_n = \frac{1}{2} 2\pi r \cdot r = \pi r^2$$

$A = \pi r^2$

Limite no Infinito

Quando você quiser estudar o comportamento de uma função para valores de *x* que crescem indefinidamente ou decrescem indefinidamente, está trabalhando com os **limites no infinito**.

O cálculo da área do círculo já é um exemplo de limite no infinito. Os exemplos 2 e 4 da seção 1, também são exemplos típicos de limites no infinito.

A seguir, vamos discutir limites no infinito. As definições formais serão omitidas, mas todos os resultados podem ser analisados intuitivamente.

O que é um limite no infinito?

Quando estamos diante do limite de uma função *y = f(x)* com *x* tendendo para mais ou menos infinito, dizemos que o limite é no infinito.

Informalmente, *f(x)* possui limite L quando *x* tende ao infinito positivo e escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} = L$$

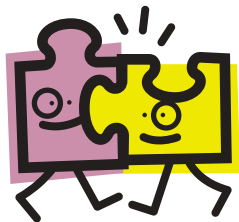
se, à medida que x se distancia da origem no sentido positivo, f(x) fica cada vez mais próximo de L.

Similarmente, *f(x)* possui limite L quando *x* tende ao infinito negativo e escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} = L$$

se, à medida que x se distancia da origem no sentido negativo, f(x) fica cada vez mais próximo de L.

Para calcular esse tipo de limite podemos usar propriedades similares às enunciadas na seção 3. Por facilidade usamos uma lin-

guagem informal com o infinito que auxilia na interpretação dos resultados. Observe essa consideração nos exemplos que seguem.

Exemplos

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = (+\infty)^2 = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

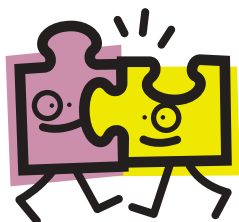
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2 + 1) = 2(+\infty)^2 +1 = +\infty$

O teorema que segue é fundamental na resolução de limites no infinito.

Em tempo
Intuitivamente é fácil perceber que 1 dividido por outro número muito grande, que tente ao infinito, em módulo tem como resultado um número muito próximo de zero. Verifique isto usando uma calculadora.

Teorema: *Se n é um numero inteiro positivo, então:*

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{1}{x^n} = 0$ *(b)* $\lim\limits_{x\to-\infty} = \dfrac{1}{x^n} = 0$

Nos exemplos que seguem vamos aplicar este teorema e apresentar situações com um outro tipo de indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplos

1) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^5 - 6x + 3}{4x^5 - 7}$.

Note que se você substituir os valores de x por um número muito grande, já que $x \to +\infty$, você terá um número muito grande tanto no numerador quanto no denominador, o que nos leva a um outro tipo de indeterminação, do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Então temos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5 - 6x + 3}{4x^5 - 7} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (indeterminação)}$$

O que fazemos neste tipo de indeterminação é dividir cada termo do numerador e do denominador pelo termo de maior grau, neste caso x^5, e em seguida usar o teorema dos limites no infinito.

Então:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5-6x+3}{4x^5-7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{6}{x^4}+\frac{3}{x^5}}{4-\frac{7}{x^5}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{x^4}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^5}}{\lim\limits_{x\to+\infty}4-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7}{x^5}}=\frac{2-0+0}{4-0}=\frac{1}{2}$$

2) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2-1}}$

Novamente estamos tratando de uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Vamos então dividir o numerador e o denominador pelo termo de maior grau que é x. Note que $x=\sqrt{x^2}$, fazemos isso pois temos um termo que é uma raiz quadrada (estamos diante de $x\to+\infty$ ou x assumindo valores positivos).

Assim,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x/x}{\sqrt{4x^2-1}\big/\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{4x^2-1}{x^2}}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\frac{1}{x^2}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{4-0}}=\frac{1}{2}$$

3) Calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{4x^2-1}}$

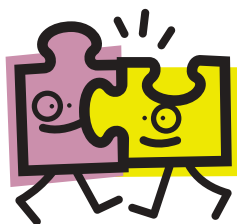
Aqui novamente nos deparamos com uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Vamos dividir o numerador e o denominador por x. Só devemos cuidar com um detalhe, como $x \to -\infty$, os valores de x podem ser considerados negativos e portanto neste caso $x = -\sqrt{x^2}$, pois não existe raiz quadrada negativa, logo consideramos o sinal de menos na frente. Assim,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2-1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x/x}{\sqrt{4x^2-1}\Big/-\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-\sqrt{\dfrac{4x^2-1}{x^2}}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} 1}{\lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{4-\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{1}{-\sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(4-\dfrac{1}{x^2}\right)}} = \frac{1}{-(4-0)} = -\frac{1}{2}$$

Um resultado geral interessante para ser usado no cálculo de limite com indeterminações do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, no caso de funções racionais é

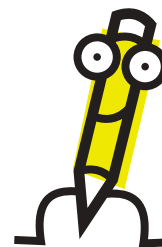
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}$$

Veja que basta trabalhar com os termos de maior grau.

Exemplos

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+6x+2}{4x^3-7x^2+2x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{4x^3} = \dfrac{3}{4} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{4} \cdot 0 = 0$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+6x+2}{7x^2+2x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{7x^2} = \dfrac{3}{7} \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = \dfrac{3}{7}$

Agora é a sua vez!

Calcule os seguintes limites no infinito:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-6}{7x+1}$	b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x^2-2x+1}{3x^3+2x^2-x+7}$
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4-7x}{2x^4-6x^3+2x^2-6x+1}$	d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-5}{\sqrt{3x^2-x+1}}$

Limites Infinitos

Considere o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ da Figura 2.11.

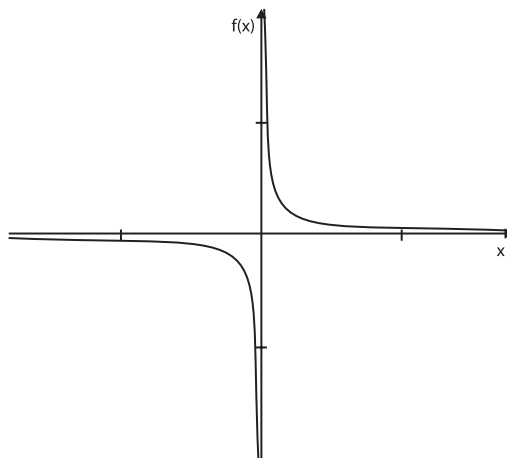



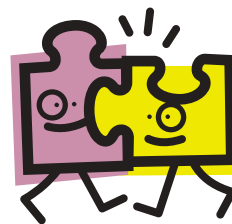
Figura 2.11 Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Graficamente é possível perceber que quando $x \to 0^+, f(x) \to +\infty$ e quando $x \to 0^-, f(x) \to -\infty$, ou seja, $f(x)$ cresce indefinidamente à direita do zero e decresce indefinidamente a esquerda do zero. Chamamos estes limites de **limites infinitos**.

O seguinte resultado ajuda na resolução de alguns limites infinitos

Em tempo
Note que este resultado é um tanto óbvio e fácil de verificar algebricamente. Basta dividir um número por outro muito próximo de zero, que você tem como resultado algo muito grande em módulo. Verifique usando uma calculadora.

Teorema: *Se n é um numero inteiro positivo qualquer, então:*

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ *(b)* $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & n \text{ par} \\ -\infty, & n \text{ impar} \end{cases}$

Exemplos

1) Calcular $\lim_{x \to 0}\left(x+\dfrac{1}{x^3}-7x\right)$

$$\lim_{x \to 0}\left(x+\frac{1}{x^3}-7x\right) = 0 + \infty - 0 = +\infty$$

2) Calcular $\lim_{x \to +\infty}(3x^3 - 6x^2 + 7x - 1)$.

$$\lim_{x \to +\infty}(3x^3 - 6x^2 + 7x - 1) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^3\left(3-\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) = +\infty(3 - 0 + 0 - 0) = +\infty$$

3) Calcular $\lim_{x \to 6^+}\dfrac{3x-1}{x-6}$ e $\lim_{x \to 6^-}\dfrac{3x-1}{x-6}$.

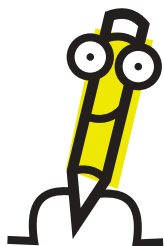
$$\lim_{x \to 6^+}\frac{3x-1}{x-6}=\frac{17}{0^+}=+\infty$$

0^+ indica que estamos tomando um número muito próximo de zero pela direita.

$$\lim_{x \to 6^-}\frac{3x-1}{x-6}=\frac{17}{0^-}=-\infty$$

0^- indica que estamos tomando um número muito próximo de zero pela esquerda.

4) Calcular $\lim_{x \to 1^+}\dfrac{-x+2}{1-x}$

$$\lim_{x \to 1^+}\frac{-x+2}{1-x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

Agora é a sua vez!

Calcule os seguintes limites.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 6x + 7)$	b) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{2x-1}{2x-16}$
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 6x + 10}{7x+1}$	d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x - 6}$
e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3 - 1}$	f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + x - 6}{6x^2 - 7x + 1}$

SEÇÃO 6

Limites fundamentais

Alguns limites são difíceis de calcular pelos métodos apresentados nas seções anteriores. Aqui serão apresentados três deles, conhecidos como limites fundamentais.

Primeiro limite fundamental

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

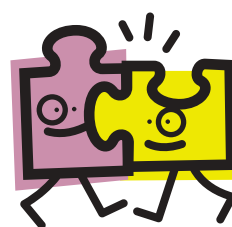
Exemplos

1) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}$

A idéia é usar o limite fundamental $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$,

Fazendo a substituição de variável $u = 5x$,

segue que se $x \to 0$, então $u \to 0$, logo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$$

Primeiro limite fundamental

Para esta demonstração apresentaremos apenas idéias geométricas. É bem interessante.

Considere a circunferência de raio 1 da Figura 2.12

Figura 2.12 Circunferência de raio 1

Nesta figura considere os seguintes triângulos que serão denotados pelos pontos dos seus vértices.

- Triângulo **ΔMOA**, cuja área é dada por:

$$A = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{MM'}}{2}$$

- Triângulo **ΔAOT**, cuja área é dada por:

$$A = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AT}}{2}$$

Temos o setor circular ***MOA***, cuja área é dada por $A = \frac{\overline{OA} \cdot \overset{\frown}{AM}}{2}$ sendo ***AM*** é o arco de circunferência.

Pela figura 12 é fácil notar que:

Área ΔMOA < área do setor MOA < área ΔAOT

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{MM'}}{2} < \frac{\overline{OA} \cdot \overset{\frown}{AM}}{2} < \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AT}}{2}$$

Multiplicando ambas partes da desigualdade por $\frac{2}{\overline{OA}}$,

obtemos que: $\overline{MM'} < \overset{\frown}{AM} < \overline{AT}$

Note que $\operatorname{sen} x = \frac{\overline{MM'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{MM'}}{1} = \overline{MM'}$ e que $\operatorname{tg} x = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT}$

A medida do arco ***AM*** é dada por ***AM = x*** radianos.

Portanto, obtemos a desigualdade: **sen x < x < tg x**

Dividindo tudo por **sen x**, obtemos: $1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$

Ou, por propriedade das desigualdades $1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$.

Temos $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, assim, considerando que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, está entre as duas funções, podemos usar o Teorema do Confronto, logo $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

2) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

Fazemos a substituição $u = 3x$. Segue que se $x \to 0$, então $u \to 0$, portanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u/3} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 3 \cdot 1 = 3$$

3) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{3x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \cdot 2x}{\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \cdot 3x} = \frac{2}{3} \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}}{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

Veja informalmente a visualização gráfica do Teorema do Confronto usando recursos computacionais (Figura 2.13).

Você pode observar que no intervalo aberto **(*c*,*d*)** *temos que qualquer função que tenha o gráfico entre os gráficos* $y = 1$ *e* $y = \cos x$, *vai ter como limite 1 quando* $x \to 0$.

Teorema do Confronto: *Se* $f(x) \le h(x) \le g(x)$ *para todo* x *em um intervalo aberto contendo* a, *exceto possivelmente em* $x=a$, *e se* $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$ *então,* $\lim_{x \to a} h(x) = L$.

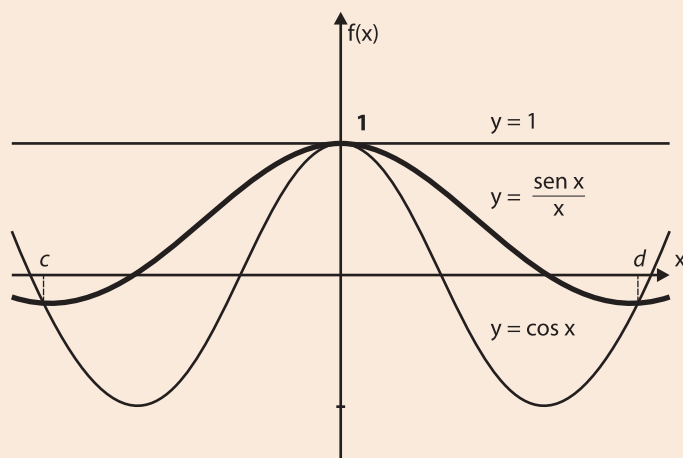



Figura 2.13 Visualização do Teorema do Confronto

Segundo limite fundamental

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

sendo e o número neperiano e vale $e = 2{,}71828...$

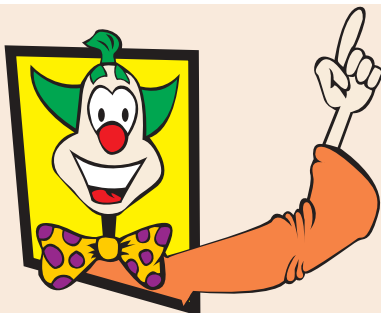
A demonstração será aqui omitida, pois requer o auxílio de séries numéricas.

Exemplos

1) Calcular $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

Vamos adaptar este limite ao limite fundamental $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Novamente necessitamos de uma mudança de variável, faz-se a substituição $\frac{2}{x} = \frac{1}{u}$, ou $2u = x$, e portanto se $x \to +\infty$, então $u \to +\infty$, logo

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{2u} = \lim_{u \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^2 = \left[\lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^2 = e^2$$

Você quer conhecer o problema da minhoca?

Coitada, sofre muito!

Veja porque... Considere a seguinte situação:

 # Suponha que uma minhoca encontra-se na extremidade de uma corda de borracha, elástica, com 100m de comprimento.

 # Suponha também que a minhoca rasteje a uma velocidade constante de 1cm/s. Passado o primeiro segundo, a corda estica, medindo agora 200m. No fim do segundo seguinte, estica mais 300m e assim sucessivamente.

E agora... Será que a minhoca chega ao fim da corda?
Em quanto tempo?

Use a sua imaginação e tire suas conclusões.

2) Calcular $\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x}$.

Fazendo a substituição $x = \frac{1}{u}$, ou $u = \frac{1}{x}$, segue que se $x \to 0$, então $u \to +\infty$. Assim,

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{u \to +\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e$$

Terceiro limite fundamental

$$\lim_{x \to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Este limite será mostrado com o estudo das aplicações da derivada na unidade 4.

Exemplos

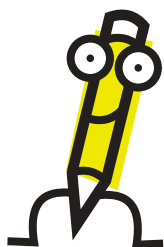
1) Calcular $\lim_{x \to 0}\frac{2^x - 3^x}{x}$

O artifício para este tipo de limite é colocar sempre o segundo termo do numerador em evidência, neste caso 3^x. Portanto,

$$\lim_{x \to 0}\frac{2^x - 3^x}{x} = \lim_{x \to 0}\frac{3^x\left(\frac{2^x}{3^x} - 1\right)}{x} = \lim_{x \to 0} 3^x \cdot \lim_{x \to 0}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1}{x} = 3^0 \cdot \ln\frac{2}{3} = 1 \cdot \ln\frac{2}{3} = \ln\frac{2}{3}$$

2) Calcular $\lim_{x \to -3}\frac{2^{x+3} - 1}{x+3}$.

Neste caso fazemos $u = x + 3$ e quando $x \to -3$, segue que $u \to 0$, logo

$$\lim_{x \to -3}\frac{2^{x+3} - 1}{x+3} = \lim_{u \to 0}\frac{2^u - 1}{u} = \ln 2$$

Agora é a sua vez!

Resolva os seguintes limites fundamentais:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{x}$	b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 7x}{\text{sen } 11x}$
c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen} x}{5x}$	d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{5}{x}\right)^x$
e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$	f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$
g) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5^{x-2} - 1}{x - 2}$	

SEÇÃO 7

Continuidade

Nesta seção você estudará o conceito de continuidade de uma função. Perceba que o conceito de limite auxilia muito na análise do comportamento de funções. E ao definir continuidade, você verá que os limites também estarão envolvidos.

Definição de Função Contínua

Considere as seguintes situações:

- Seja $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, traçada graficamente na Figura 2.14.

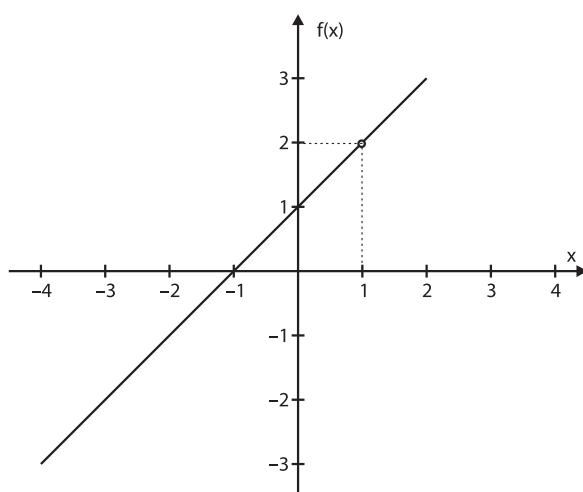



Figura 2.14 Gráfico de $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

Note que esta função não está definida para x = 1. Graficamente percebemos a existência de um "buraco" no ponto x = 1. Este "buraco" é um **ponto de descontinuidade de *f*.**

- Seja $f(x) = \begin{cases} -x+2\,; & x \leq 0 \\ 3x\,; & x > 0 \end{cases}$

cuja representação gráfica está na Figura 2.15.

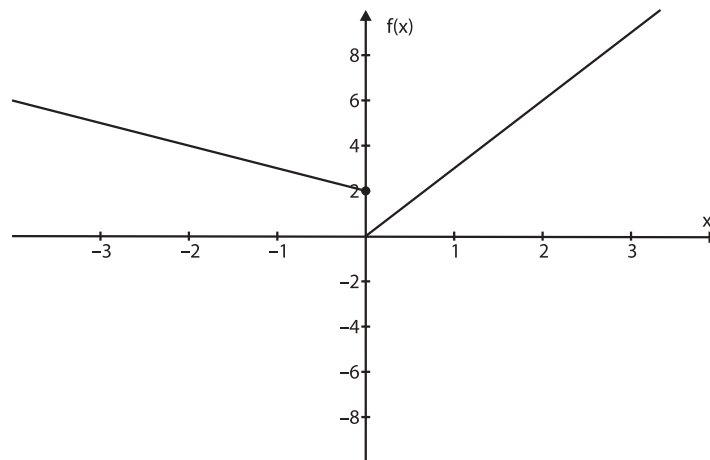



Figura 2.15 Gráfico da função f(x)

Note que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 3x = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x+2) = 2$, ou seja, não existe o limite quando x se aproxima de 0, já que os limites laterais não são iguais.

Neste caso percebe-se que a função f deu um "salto", no ponto x = 0, chamado de **salto de descontinuidade.**

- Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$, que tem como gráfico a figura abaixo

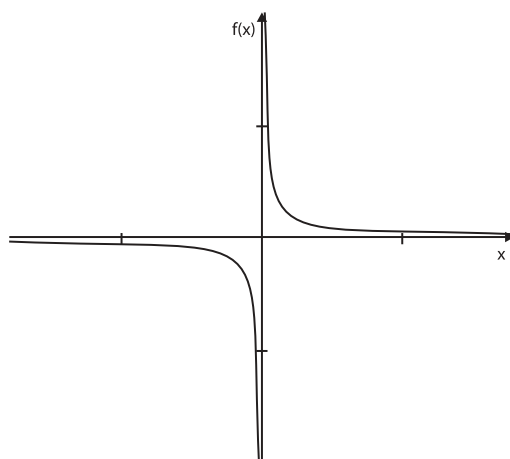



Figura 2.16 Gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Nesta situação a função *f* não está definida em 0, e também o limite não existe quando *x* aproxima-se de 0, pois os limites laterais são diferentes, isto é, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$. Este é mais um caso de uma função que não é contínua.

- Seja $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & ; \quad x\neq 1\\ 3 & ; \quad x=1\end{cases}$.

Veja o gráfico de *f* na Figura 2.17.

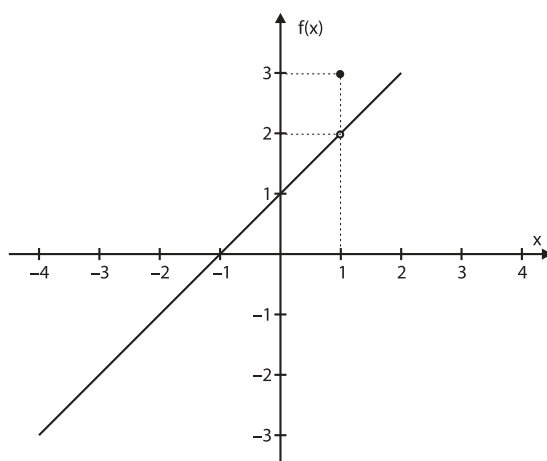



Figura 2.17 Gráfico da função f

Neste caso f está definida em $x = 1$ e vale 3, ou seja, $f(1) = 3$ e o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de 1 também existe e vale 2.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$$

O que acontece é uma diferença entre o valor da função e o valor do limite em $x = 1$. Isto faz com que a função tenha um "salto", caracterizando uma descontinuidade novamente.

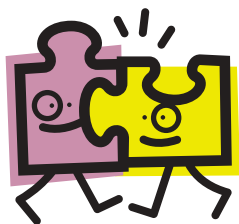
Por todas as situações estudadas acima, sugere-se a seguinte definição:

Definição: *Diz-se que uma função f é contínua em um ponto a se as seguintes condições estiverem satisfeitas:*

(a) $f(a)$ *está definida.*

(b) $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe.*

(c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Em outras palavras, uma função f é contínua em um ponto a, quando o valor da função e o valor do limite em a, são iguais.

Exemplos

1) Verificar se a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & ; \quad x \neq 1 \\ 3 & ; \quad x = 1 \end{cases}$ é contínua em $x = 1$.

Note que f está definida em 1 e vale 3, isto é, $f(1) = 3$. Agora

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$$

Como o valor da função e o valor do limite diferem no ponto $x = 1$, segue pela definição de continuidade que $f(x)$ não é contínua em $x = 1$.

2) Verificar se a função $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & ; \quad x\neq 0\\ 1 & ; \quad x=0\end{cases}$ é contínua em $x = 0$.

$g(0) = 1$, portanto g é definida em $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$ (limite fundamental)

Como o valor da função e o valor do limite em $x = 0$ são iguais,
segue que a função é contínua em $x = 0$,

3) Verificar se a função $h(x)=\begin{cases}x+2 & ; \quad x\geq 2\\ -x+6 & ; \quad x<2\end{cases}$ é contínua em $x = 2$.

Facilmente verifica-se que $h(2) = 4$. Agora para verificar o limite em $x = 2$, devemos verificar os limites laterais.

$$\lim_{x\to 2^+} h(x)=\lim_{x\to 2^+}(x+2)=4$$
$$\lim_{x\to 2^-} h(x)=\lim_{x\to 2^-}(-x+6)=4$$

Portanto $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=4$. Como o valor da função e o valor do limite são iguais em $x = 2$, segue a que a função é contínua em $x = 2$.

Propriedades das Funções Contínuas

A seguir serão apresentadas algumas propriedades das funções contínuas:

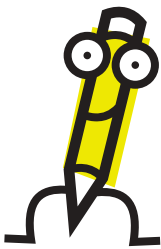
Propriedade 1

Se as funções f e g são contínuas em um ponto a, então:

- $f \pm g$ é continua em a.
- $f \cdot g$ é contínua em a.
- $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a, se $g(a) \neq 0$

Propriedade 2

Algumas funções conhecidas são contínuas em todos os pontos:

- Toda função polinomial é contínua em todos os números reais.
- As funções $f(x)$ = sen x e $g(x)$ = cos x são contínuas para todo número real x.
- A função exponencial $f(x) = e^x$ é contínua para todo número real x.

Agora é a sua vez!

1) Verifique se as seguintes funções são contínuas no ponto indicado.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$, em $x = 3$

b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6} & ; \quad x\neq 3\\ 6 & ; \quad x=3\end{cases}$, em $x = 3$

c) $h(x) = x^2 - 2x + 1$, em $x = 1$

d) $f(x)=\begin{cases}x^2 & ; \quad x\geq 0\\ x+2 & ; \quad x<0\end{cases}$, em $x = 0$

2) Em cada item, encontre uma função f que satisfaça a condição proposta.

(a) f é contínua em toda parte, exceto no ponto $x = 1$.

(b) f tem limite em $x = 1$, mas não é contínua naquele ponto.

3) Ache o valor de k, para que a função f seja contínua.

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & ; \quad x \geq 3 \\ kx & ; \quad x < 3 \end{cases}$$

4) Encontre os pontos de descontinuidade das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ (b) $g(x) = \dfrac{x}{|x|}$ (c) $h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; \quad x \neq 3 \\ 10 & ; \quad x = 3 \end{cases}$

Síntese

Ao abordarmos a noção intuitiva, a definição e o cálculo de limites, nosso objetivo maior é embasar os seus estudos para um melhor entendimento das derivadas e suas aplicações.

É interessante perceber que historicamente as necessidades práticas levaram os matemáticos a considerarem as derivadas antes dos limites. Mas são os limites que conseguiram provar e generalizar alguns conceitos que já eram utilizados pelos estudiosos, filósofos e matemáticos.

Antes de seguir adiante, faça os exercícios propostos e tire suas dúvidas com o seu professor tutor.

Bons estudos!

Atividades de auto-avaliação

1) Mostre que $\lim_{x \to 1} (-2x + 4) = 2$, usando a definição de limite.

2) Encontre o valor de δ para $\varepsilon = 0{,}001$, sabendo que $\lim_{x \to 2} (5x - 7) = 3$

3) Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim_{x \to 2} (x^3 - 6x^2 + 7x - 1)$

(b) $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2 + x + 64}$

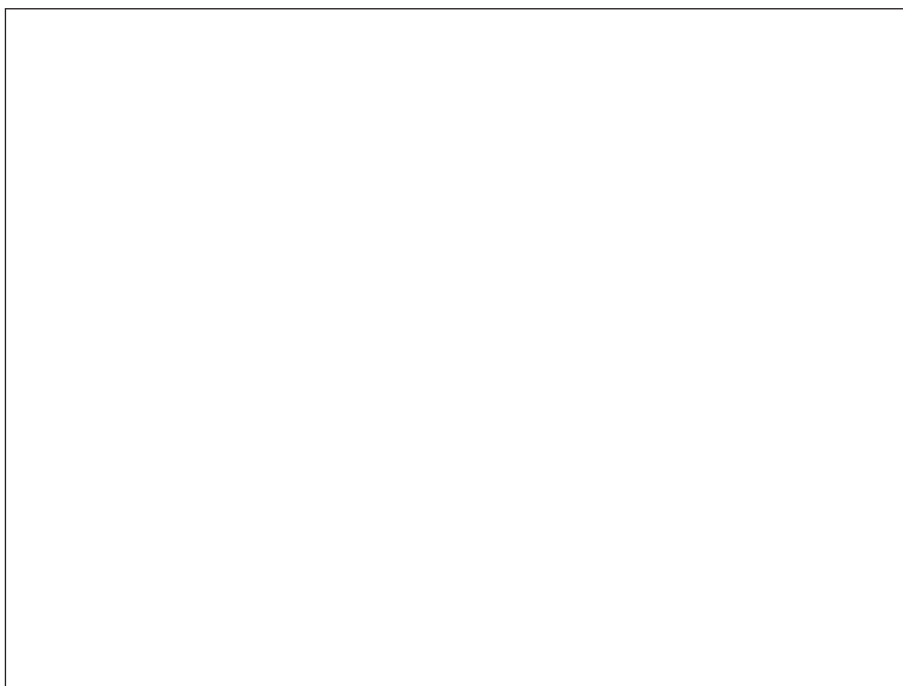
(c) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+2}$

(d) $\lim_{x \to 0} \text{tg } x$

(e) $\lim_{x \to 1} e^{x^2 - 1}$

(f) $\lim_{x \to -1} (x - 1)^2 \cdot (2x + 1)^3$

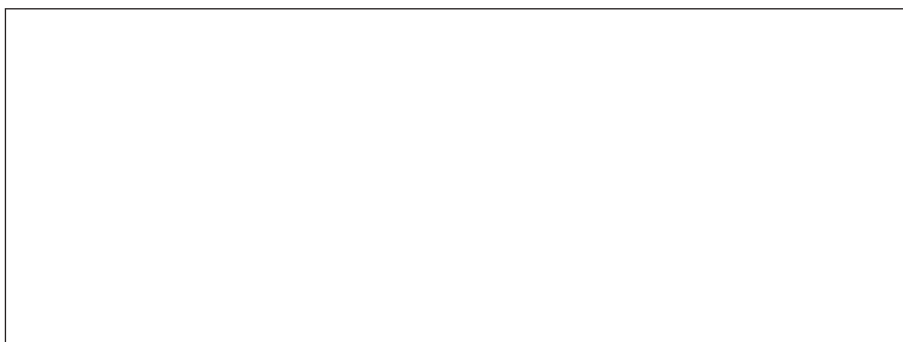
4) Seja $f(x)=\begin{cases} 2-x & x<-1 \\ x & -1\leq x<1 \\ 4 & x=1 \\ 4-x & x>1 \end{cases}$

(a) Faça o gráfico de $f(x)$.

(b) Usando o gráfico da parte (a), determine:

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=$ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=$

5) Seja $f(x) = 3 - |3 - x|$. Calcule $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

6) Seja $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2} & x>2\\ 8-4x & x<2\end{cases}$, existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

7) Calcule os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-3)^2-9}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

(e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{4-x}{2-\sqrt{x}}$

(f) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-2x-15}{-5x+x^2}$

(g)

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2-x-12}{x+3}$

8) Encontre os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3}$

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}$

(c) $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 6x^2 + x + 1)$

(d) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + x^2 - \frac{1}{x^6} \right)$

(e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 6x - 1}{x^2 + x - 2}$

(f) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 1}{5x + 1}$

(g) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3 - 6x^2 + x - 1}{10x^4 - 1}$

(h) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(i) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+2}{2-x}$

(j) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+2}{2-x}$

(k) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{(x+3)^4}$

(l) $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2}{(x+3)^3}$

9) Resolva os limites abaixo usando os limites fundamentais.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, 7x}{x}$

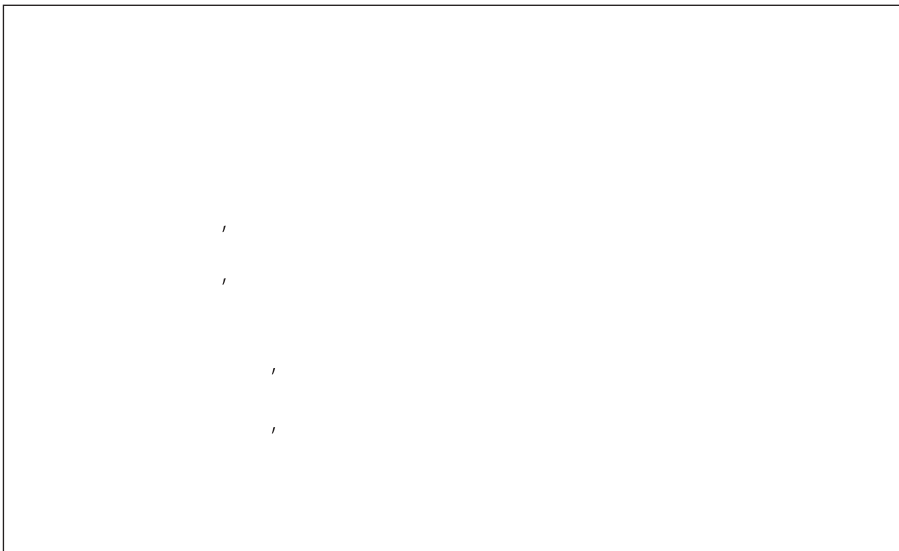
(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, 2x}{\text{sen}\, 6x}$

(c) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$

(d) $\lim_{x \to 0} \frac{7^x - 2^x}{x}$

(e) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+3}$

(f) $\lim_{x \to 3} \frac{6^{x-3} - 1}{x - 3}$

10) Encontre o valor de *k* para que $f(x) = \begin{cases} kx + 1 & ; \ x \neq 4 \\ kx^2 - 1 & ; \ x = 4 \end{cases}$ seja contínua.

11) Verifique se as seguintes funções são contínuas no ponto dado.

(a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-2}$, em $a=2$

(b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & x\neq -2\\ -4 & x=-2\end{cases}$, em $a=-2$

(c) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-8}{x-4} & x\neq 4\\ 3 & x=4\end{cases}$, em $a=4$

Saiba mais

Para aprofundar os seus estudos ou resolver outros exercícios, você deve ir até a biblioteca da Unisul e consultar o livro Cálculo A, cuja referência é a seguinte:

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. Cálculo A: funções, limite, derivação, integração. 5.ed. São Paulo: Makron, 1992.

O capítulo 3 deste livro aborda os limites e continuidade de funções.

UNIDADE 3

Derivadas

Objetivos de Aprendizagem

- Entender o conceito de derivada de uma função;
- Compreender a interpretação geométrica da derivada;
- Calcular derivadas usando as regras de derivação;
- Calcular derivadas sucessivas;
- Calcular derivadas de funções na forma implícita;
- Aplicar diferenciais para resolver problemas práticos.

Seções de estudo

Para início de conversa

Nesta unidade você estudará a derivada de uma função, e perceberá, ao longo do estudo do Cálculo, que a derivada é um poderoso instrumento da matemática.

Na natureza, em nosso dia-a-dia, existem muitos fenômenos que envolvem a variação de grandezas. Por exemplo, a velocidade de um automóvel, os índices de inflação de um país, a taxa de crescimento populacional, a intensidade de um terremoto etc.

Para estudar tais fenômenos que envolvem taxas de variação de grandezas, usa-se o conceito de derivada.

Assim, entender a derivada passa a ser essencial para você, estudante de um curso superior que possui a matemática como base em seu currículo, visto que, posteriormente irá aplicá-la em situações práticas.

Questões motivadoras

Como encontrar a inclinação de uma reta tangente à uma curva? E o que isto significa?

Qual a relação entre as taxas de variação e a inclinação da reta tangente à uma curva em um ponto P?

O que significa um acréscimo ou o diferencial de uma variável?

Estas e outras perguntas você poderá responder ao final desta unidade.

O conceito de função que você estudou na Unidade 1 hoje pode parecer simples, mas é o resultado de uma lenta e longa evolução histórica iniciada na Antiguidade pelos Babilônios e Pitagóricos. A medida em que as funções eram estudadas, conceitos geométricos incorporavam este estudo e o Cálculo Diferencial foi se desenvolvendo.

O que você estudará nesta unidade é o resultado do estudo de matemáticos importantes que nos deixaram suas descobertas como tesouros prontos a serem desfrutados.

Fermat, Newton, Leibniz, a família Bernoulli, Euler, Lagrange, Cauchy e tantos outros.

Estes são nomes que devem ficar em sua mente por terem contribuído para o desenvolvimento do Cálculo.

SEÇÃO 1

Retas tangentes e taxas de variação

No estudo das derivadas, antes de defini-las, é interessante que você conheça a inclinação de retas tangentes.

Lembre-se que uma reta qualquer possui uma inclinação que é dada pelo ângulo formado entre a reta e o eixo horizontal. Veja a Figura 3.1:

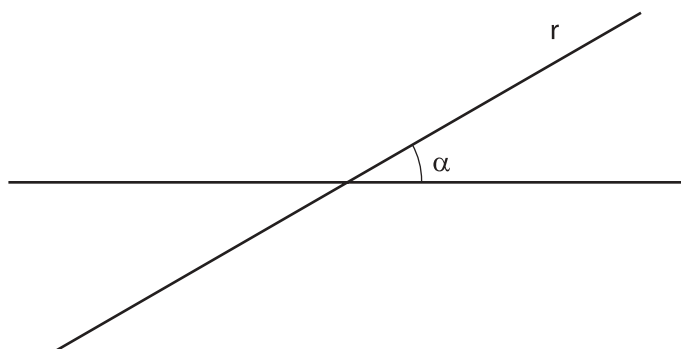



Figura 3.1 Representação da inclinação de uma reta *r*.

Assim, a inclinação da reta r é dada pela tangente do ângulo α ($\text{tg}\ \alpha$).

Observe a Figura 3.2.

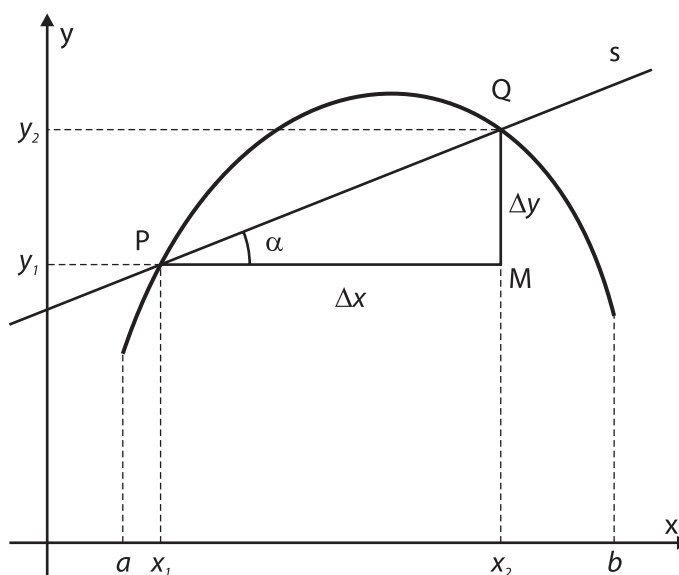



Figura 3.2 Curva dada por y = f(x) e a reta secante *s*.

Nesta Figura 3.2 traçou-se o gráfico de uma função qualquer $y = f(x)$ (por exemplo, uma função do segundo grau, exponencial, trigonométrica, hiperbólica etc), bem como uma reta secante que passa pelos pontos *P* e *Q*.

Para determinar a inclinação da reta secante *s*, pode-se escrever a tangente de α já que o triângulo *PMQ* é retângulo (na seção 7 da unidade 1 você viu a definição da tangente de um ângulo):

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Agora imagine que colocamos um alfinete no ponto *P* para que fique fixo e o ponto *Q* passa a se mover em direção ao ponto *P*. Perceba que a reta se move mas, com o alfinete imaginário, o ponto *P* não sai do lugar.

Quando *Q* chega próximo a *P*, a reta secante passa a se transformar em uma reta tangente.

Neste processo, o que interessa é a análise das inclinações das retas mencionadas: a secante e a tangente. Se a reta secante se aproxima da reta tangente, então pode-se dizer que o ponto Q tende para o ponto P, ou ainda, a inclinação da reta secante varia cada vez menos e tende a um valor limite constante.

Você percebeu que aqui aparecem as tendências estudadas na unidade 2 sobre os limites?

Observe na Figura 3.2 que $x_2 \to x_1$, $Q \to P$, reta secante $\to$ reta tangente.

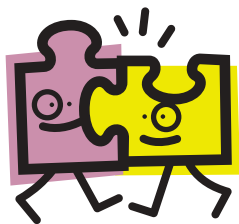
É possível escrever estas considerações da seguinte forma:

$$\lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

É interessante que o limite acima seja reescrito.
Já que $\Delta x = x_2 - x_1$, então $x_2 = x_1 + \Delta x$, assim:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

sendo $m(x_1)$ a inclinação da reta tangente à curva dada por $y = f(x)$ no ponto P.

Quando estudava algumas funções, Fermat, no século XVII, se deu conta das limitações do conceito clássico de reta tangente a uma curva. Para reformular tal conceito, realizou o mesmo procedimento que você acabou de visualizar quando tratamos da reta tangente: a partir de uma reta PQ, secante à curva, é possível deslizar Q em direção à P até que se obtenha a reta tangente à curva no ponto P. Esta reformulação ficou conhecida como o "Problema da Tangente" e muito contribuiu para o conceito que é hoje adotado.

Exemplos

1) Determinar a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 + 1$ no ponto P(1,2).

A inclinação da reta tangente é dada por $m(1)$, visto que o ponto P possui $x = 1$, e pode ser calculada pelo limite:

$$m(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

sendo:

$f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 + 1 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 = 2 + 2\Delta x + (\Delta x)^2$

$f(1) = 1^2 + 1 = 2.$

Assim, tem-se:

$$m(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x)$$
$$= 2 + 0 = 2.$$

Portanto, a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 + 1$ no ponto P(1,2) é igual 2. Veja a Figura 3.3 que representa a curva e a reta tangente no ponto P(1,2).

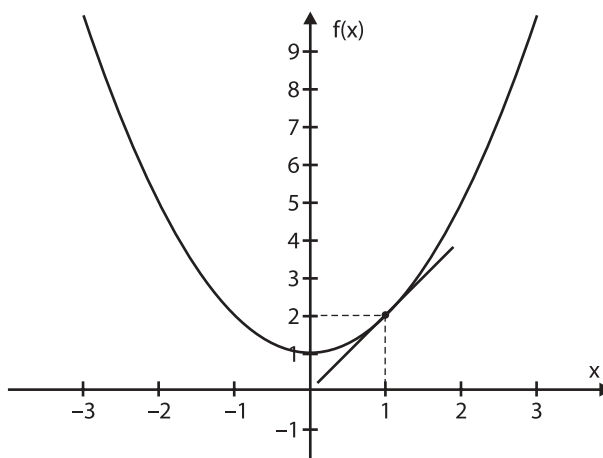



Figura 3.3 Reta tangente à curva $y = x^2 + 1$ no ponto P(1,2).

2) Encontrar a equação da reta tangente à curva $y=\sqrt{x}$ no ponto em que x = 4.

O problema solicita a equação da reta tangente. Para encontrar esta equação, vamos determinar a inclinação da reta calculando m e substituindo na equação da reta tangente, que é dada por:

$y - f(x_1) = m(x - x_1)$.

Observação: Quando o limite que define m for infinito, então a equação da reta tangente é dada por $x = x_1$.

Vamos calcular o valor de $m(4)$

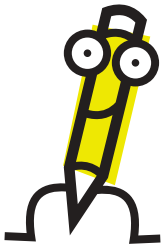
$$
\begin{aligned}
m(4) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4+\Delta x} - \sqrt{4}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4+\Delta x} - 2}{\Delta x}.
\end{aligned}
$$

Este limite é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Portanto, é necessário tirar esta indeterminação, multiplicando numerador e denominador por $\left(\sqrt{4+\Delta x}+2\right)$:

$$
\begin{aligned}
m(4) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4+\Delta x} - 2}{\Delta x} \frac{\left(\sqrt{4+\Delta x}+2\right)}{\left(\sqrt{4+\Delta x}+2\right)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{4+\Delta x}\right)^2 - 2^2}{\Delta x\left(\sqrt{4+\Delta x}+2\right)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4+\Delta x - 4}{\Delta x\left(\sqrt{4+\Delta x}+2\right)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{4+\Delta x}+2\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{4+0}+2\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{4}+2\right)} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Você pode utilizar um software matemático para traçar o gráfico da função $y=\sqrt{x}$ e da reta $y=\frac{x}{4}+1$. Você poderá visualizar neste gráfico a reta tangente à curva no ponto (4,2).

A reta tangente será:

$$y-f(4)=m(x-4)$$
$$y-\sqrt{4}=\frac{1}{4}(x-4)$$
$$y-2=\frac{x}{4}-1$$
$$y=\frac{x}{4}-1+2$$
$$y=\frac{x}{4}+1.$$

Agora é a sua vez!

1) Determine a inclinação da reta tangente à curva $y=x^2+2x+1$ no ponto (1,4).

2) Qual a equação da reta tangente à esta mesma curva $y=x^2+2x+1$ no ponto (–1,0)?

Você pode achar estranho estarmos falando de retas tangentes, um assunto que parece ser da Geometria. Mas foi a partir das retas tangentes que houve um aprofundamento no estudo do movimento de objetos.

A partir destes estudos, é possível definir a taxa média de variação e a taxa instantânea de variação.

A taxa média de variação é dada pela inclinação da reta secante, que pode ser escrita conforme você já viu anteriormente da seguinte forma:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

A taxa de variação instantânea é dada pela inclinação da reta tangente, que pode ser escrita através do limite abaixo, conforme visto anteriormente.

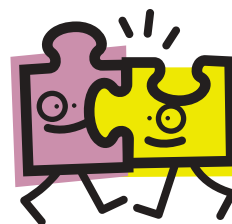
$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Exemplo

Seja a função f(x) = x^2 – 1.

(a) Determinar a taxa média de variação de y em relação a x no intervalo [1,3].

Aplicando a fórmula apresentada tem-se:

$$\begin{aligned}\text{Taxa média} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \\ &= \frac{(3^2 - 1) - (1^2 - 1)}{2} \\ &= \frac{9 - 1 - 0}{2} = \frac{8}{2} = 4.\end{aligned}$$

(b) Encontrar a taxa de variação instantânea de y em relação a x no ponto $x = 1$.

$$
\begin{aligned}
\text{Taxa instantânea} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1 - (1^2 - 1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1 - 0}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) \\
&= (2+0) = 2.
\end{aligned}
$$

Na unidade 4 você terá a oportunidade de aprofundar os conceitos de taxa de variação média e instantânea, além de resolver problemas práticos que envolvem tais taxas.

Neste momento, você precisa entender as conexões entre o cálculo da inclinação da reta tangente e as taxas de variação com o conceito de derivada de uma função.

SEÇÃO 2

Derivada de uma função

O conceito de derivada passa a ser simples se você entendeu as considerações apresentadas na seção 1 desta unidade.

A derivada de uma função $y = f(x)$ é também uma função calculada pelo limite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Não é uma coincidência!

Se este limite existe, representa a derivada de uma função, que escrevemos como $f'(x)$ *(f linha de x).*

> ***Observação:***
>
> *Além da notação $f'(x)$ também é possível escrever:*
>
> $D_x f(x)$ *– derivada de f(x) em relação a x;*
>
> $D_x y$ *– derivada de y em relação a x;*
>
> $\frac{dy}{dx}$ *– derivada de y em relação a x.*

Perceba que, ao calcular uma derivada em um ponto *P* qualquer, você está calculando a inclinação da reta tangente à curva dada pela função neste mesmo ponto *P*. Além disso, a derivada pode representar a taxa de variação de uma grandeza em relação a outra.

A astronomia fascinava Newton, que estava sempre observando o movimento dos planetas. Acredita-se que, foi questionando as órbitas dos planetas, observando e estudando seus movimentos, que iniciou sua longa produção científica, que englobou as derivadas e integrais (que serão estudadas no Cálculo II), assim como a base da mecânica clássica.

Pode acontecer que o limite da definição da derivada de uma função em um ponto não exista. Nesse caso, dizemos que a derivada não existe. Esse fato é facilmente visualizado numa representação gráfica, pois um ponto anguloso é observável (veja a Figura 3.4).

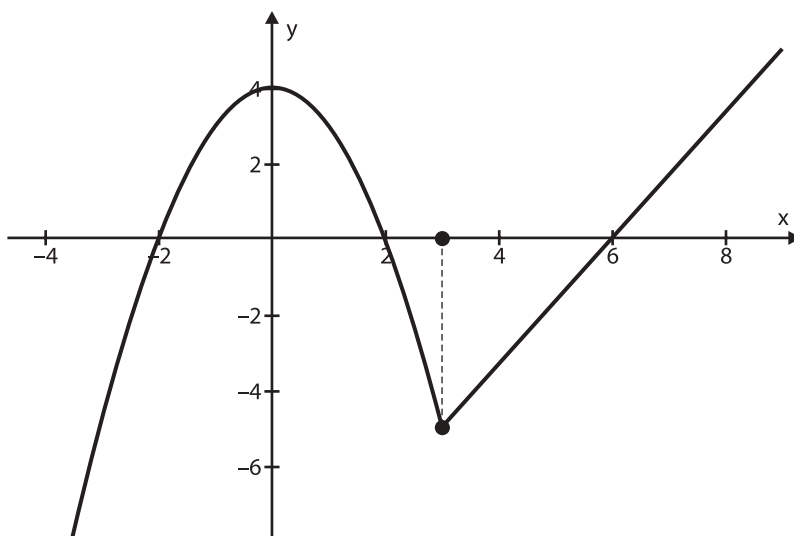
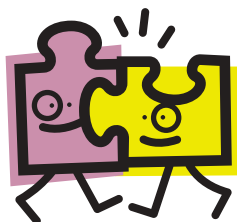



Figura 3.4 Gráfico de uma função que possui um ponto anguloso em $x = 3$

Exemplo

1) Calcular a derivada da função $f(x) = x^2 - 1$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - 1 - (x^2 - 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 1 - x^2 + 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$
$$= (2x + 0) = 2x.$$

Se a derivada da função $f(x) = x^2 - 1$ é dada por $f'(x) = 2x$, então para um ponto x qualquer, que pertence do domínio de $f(x)$, teremos a inclinação da reta tangente.

Por exemplo, para o ponto $x = 0$, tem-se

$$f'(0) = 2 \times 0 = 0$$

Se a inclinação é igual a zero, isto significa que a tg $\alpha = 0$, ou seja, $\alpha = 0$. Veja na Figura 3.5 a representação da reta tangente no ponto (0,–1). Observe que esta reta tangente é paralela ao eixo x.

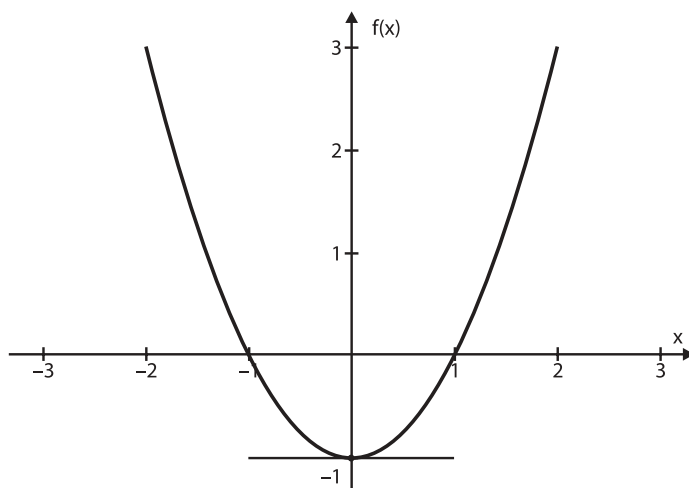



Figura 3.5 Gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ com a reta tangente no ponto (0,–1)

Você viu na unidade 2 o conceito de continuidade de uma função qualquer. Existe um teorema que diz que toda função que possui derivada no ponto X_1, será, com certeza, contínua nesse ponto.

Analisando o exemplo 1), é possível dizer que no ponto $x = 0$ a função $f(x) = x^2 - 1$ é contínua já que existe a derivada neste ponto.

Em tempo
Perceba que a função apresentada está escrita usando-se as variáveis s e t. Portanto, é necessário fazer a adequação da notação no limite a ser calculado.

2) Qual a derivada da função $s(t)=\dfrac{1}{t+1}$?

Para calcular esta derivada, basta determinar o seguinte limite:

$$
\begin{aligned}
s'(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dfrac{1}{t+\Delta t+1}-\dfrac{1}{t+1}}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dfrac{t+1-(t+\Delta t+1)}{(t+\Delta t+1)(t+1)}}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-(\Delta t)}{(t+\Delta t+1)(t+1)}\times\frac{1}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-1}{(t+\Delta t+1)(t+1)}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-1}{(t+0+1)(t+1)}=\frac{-1}{(t+1)(t+1)}=\frac{-1}{(t+1)^2}=\frac{-1}{t^2+2t+1}.
\end{aligned}
$$

3) Verificar que a função f(x) = | x | não é derivável no ponto $x = 0$.

Para verificar se a função f(x) é derivável em $x = 0$, vamos calcular o limite que define a derivada de uma função:

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.
\end{aligned}
$$

Perceba que o limite envolve uma função modular. Conforme você estudou na unidade 1, este módulo pode ser reescrito como:

$$
|\Delta x| = \begin{cases}\Delta x & ; \quad \Delta x \geq 0\\ -\Delta x & ; \quad \Delta x < 0\end{cases}
$$

Desta forma, será necessário calcular os limites laterais.

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \qquad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

Se os limites laterais não são iguais, dizemos que o limite não existe, ou seja,

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \text{não existe.}$$

Assim, verifica-se que a função $f(x) = |x|$ não é derivável no ponto $x = 0$, visto que o limite neste ponto não existe.

Na Figura 3.6 você pode visualizar o gráfico desta função, e perceber a existência de um ponto anguloso em $x = 0$.

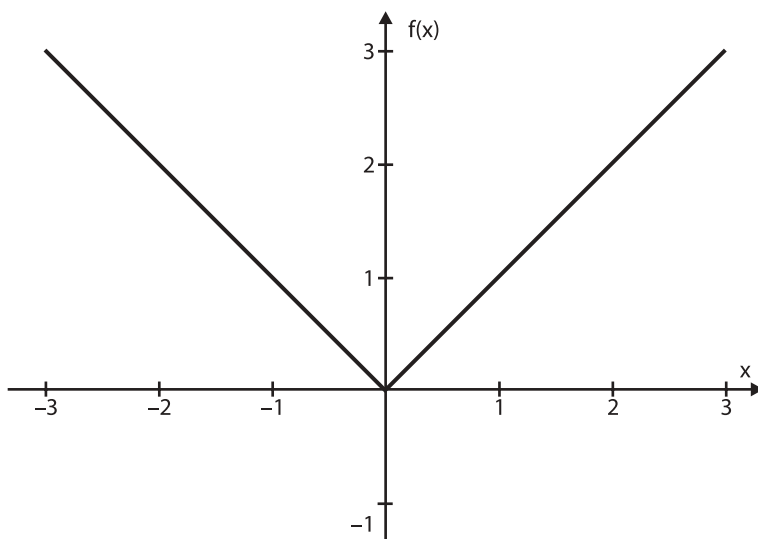
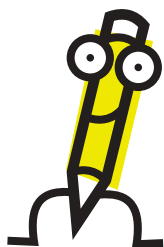



Figura 3.6 Gráfico de $f(x) = |x|$

Agora é a sua vez!

Determine a derivada das seguintes funções, usando a definição:

(a) $g(x)=\sqrt{x}$

(b) $v(t) = 4 - t^2$

(c) $r(\theta)=\frac{2}{\theta}$

SEÇÃO 3

Regras de derivação

Nesta seção você poderá perceber que calcular derivadas é ainda mais simples do que você pensava!

Você quer saber como simplificar este processo?
Alguém resolveu, em algum dia qualquer, calcular vários limites que definiam as derivadas de várias funções. Criaram-se regras de derivação que nada mais são do que regras que permitem o cálculo de derivadas de funções sem o uso da definição, ou seja, sem que seja necessário calcular o $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Veja o quadro a seguir para conhecer algumas regras de derivação.

Regra	Função	Derivada
Derivada de uma constante	$f(x) = c$ c é uma constante	$f'(x) = 0$
Regra da potência	$f(x) = x^n$ n inteiro positivo	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Derivada do produto de uma constante por uma função	$g(x) = c \cdot f(x)$ c é uma constante	$g'(x) = c \cdot f'(x)$
Derivada de uma soma	$h(x) = f(x) + g(x)$	$h'(x) = f'(x) + g'(x)$
Derivada de um produto	$h(x) = f(x) \cdot g(x)$	$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
Derivada de um quociente	$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $g(x) \neq 0$	$h'(x) = \dfrac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Seria relativamente fácil provar para você as regras de derivação que foram colocadas na tabela anterior. Mas ficaríamos fazendo isto por um tempo razoável!

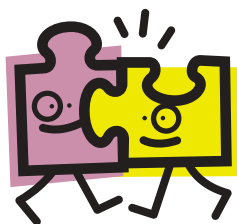
Então, vou lhe mostrar apenas uma e peço que você procure em um livro de Cálculo Diferencial e Integral (por exemplo o Cálculo A) caso queira conhecer as demais provas.

Suponha uma função **h(x) = f(x) + g(x)**.

Para calcular a derivada de **h(x)** escreve-se o limite:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - [f(x)+g(x)]}{\Delta x}.$$

Apenas reescrevendo os termos desse limite, tem-se:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$
$$= f'(x) + g'(x).$$

Exemplos

Usando as regras de derivação, encontrar as derivadas das funções dadas:

(a) $f(x) = 2$

- Usando a derivada de uma constante: $f'(x) = 0$.

(b) $f(x) = x^3$

- Usando a regra da potência: $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$.

(c) $f(t) = 3t^2$

Usando a derivada do produto
de uma constante por uma função: $f'(t) = 3(t^2)'$.

Para determinar $(t^2)'$ usamos a regra da potência, assim:

$f'(t) = 3(2t^{2-1}) = 3 \cdot 2t = 6t$.

(d) $g(x) = \dfrac{x^4}{4}$

Perceba que $g(x) = \dfrac{1}{4} \cdot x^4$, ou seja, pode ser vista como o produto de uma constante por uma função. Assim, a derivada $g'(x)$ é dada por:

Em tempo
Perceba que estamos usando a notação $g'(x)$. No entanto também poderíamos escrever a derivada como:

$$\frac{dg}{dx}$$

$$g'(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^4)' \\ = \frac{1}{4} \cdot (4x^3) \\ = x^3.$$

(e) $h(x) = 4x^3 - x^2 + 3x - 2$

A função $h(x)$ é a soma de outras quatro funções. Assim, usamos a derivada de uma soma:

$$h'(x) = (4x^3)' + (-x^2)' + (3x)' + (-2)' \\ = 4 \cdot 3x^2 + (-2x) + 3 + 0 \\ = 12x^2 - 2x + 3.$$

(f) $y = (3x^2 + x)(4 - x^4)$

Perceba que a função y é dada pelo produto das funções $(3x^2 + x)$ e $(4 - x^4)$. Usando a derivada de um produto, teremos:

$$y' = (3x^2 + x)(4 - x^4)' + (3x^2 + x)'(4 - x^4) \\ = (3x^2 + x)(0 - 4x^3) + (3 \cdot 2x + 1)(4 - x^4) \\ = (3x^2 + x)(-4x^3) + (3 \cdot 2x + 1)(4 - x^4).$$

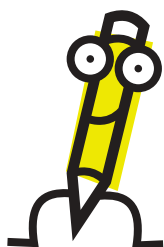
É comum realizarmos as operações para, quando possível, simplificar a expressão da derivada. Neste exemplo temos:

$$y' = -12x^5 - 4x^4 + 24x - 6x^5 + 4 - x^4$$
$$= -18x^5 - 5x^4 + 24x + 4.$$

(g) $h(x) = \dfrac{10 - x^3}{x+2}$

Usando a derivada de um quociente, temos que $f(x) = 10 - x^3$ e $g(x) = x + 2$. Então, a derivada será dada por:

$$h'(x) = \frac{(x+2)(10-x^3)' - (10-x^3)(x+2)'}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{(x+2)(0-3x^2) - (10-x^3)(1+0)}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{(x+2)(-3x^2) - (10-x^3)(1)}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{-3x^3 - 6x^2 - 10 + x^3}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{-2x^3 - 6x^2 - 10}{x^2 + 4x + 4}$$

O segredo da derivada está na realização de exercícios. Você precisa exercitar para conseguir identificar tranqüilamente qual a regra de derivação usará para cada exercício. Então, mãos à obra!

Agora é a sua vez!

Encontre a derivada das seguintes funções:

(a) $y = 7 - \frac{3}{4}x^4$

(b) $f(t) = 4t^3 - 6t + 3$

(c) $g(s) = (s^3 + 1)(s^2 + 3s)$

(d) $h(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{x-1}{x+1}$

(e) $f(x) = (4 - x^3)^{-1} \cdot (x + 4)$

(f) $y = \frac{2}{x^2} - \frac{5}{2x^6}$

(g) $f(x) = \frac{x^2 + 6x}{x}$

(h) $r(t) = \frac{t^3 - 3t^2 + 1}{2}$

(i) $y = \frac{-3}{4}(4 - x)(x^3 - x)$

(j) $g(x) = (x - 1)(x^2 - 2)(x^3 - 3)$

SEÇÃO 4

Regra da cadeia

No estudo das funções é comum tratarmos de funções compostas. Por exemplo, se $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^3$, então diz-se que $f \circ g$ (leia f bola g ou f composta com g) será dada por:

$$f \circ g = f(\,g(x)\,) = f(x^3) = x^3 + 1.$$

Tendo em mente as funções compostas, o interesse desta seção é mostrar uma regra das derivadas que envolvem a composição de funções e, por este motivo, possibilita o cálculo de derivadas de funções mais elaboradas.

A **regra da cadeia** enuncia que, se tivermos uma função $y = g(u)$, sendo que $u = f(x)$, é possível calcular $\frac{dy}{dx}$ se conhecemos $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$.

Podemos escrever:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Assim, a derivada de y em relação a x é calculada pelo produto da derivada de y em relação a u e da derivada de u em relação a x.

Exemplos

1) Calcular a derivada $\frac{dy}{dx}$ sendo $y = u^3$ e $u = x^2 + 3x - 1$.

Vamos calcular as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$:

$$\frac{dy}{du} = 3u^2$$

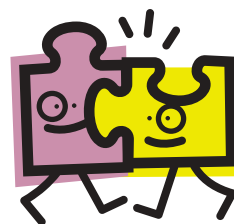
$$\frac{du}{dx} = (x^2)' + (3x)' - (1)' = 2x + 3 - 0 = 2x + 3.$$

Usando a regra da cadeia dizemos que $\frac{dy}{dx}$ é dada pelo produto das derivadas calculadas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot (2x + 3).$$

Substituindo $u = x^2 + 3x - 1$ temos:

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 + 3x - 1)^2 \cdot (2x + 3)$$

Você percebeu que a Regra da Cadeia possibilita o cálculo de derivadas de funções mais elaboradas?

Mas mesmo usando esta regra, às vezes os cálculos são muito trabalhosos para serem feitos à mão. Por isto, existem softwares que realizam cálculos algébricos e nos auxiliam na determinação das derivadas. O Derive é um destes softwares, e sugiro que você tente calcular algumas derivadas usando esta ferramenta computacional!

2) Dada a função $y=\left(\dfrac{2x+5}{x^2+3}\right)^{10}$, encontrar y'.

É possível reescrever a função *y* da seguinte forma:

$$y = u^{10}$$

sendo $u=\dfrac{2x+5}{x^2+3}$.

Usando a regra da cadeia, é possível encontrar $y'=\dfrac{dy}{dx}$ através do produto

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Assim, temos:

$$\frac{dy}{du} = 10u^9$$

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{2x+5}{x^2+3}\right)'.$$

Perceba que $\dfrac{du}{dx}$ pode ser calculada pela regra do quociente:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \frac{(x^2+3)(2x+5)'-(2x+5)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}\\
&= \frac{(x^2+3)(2\cdot 1+0)-(2x+5)(2x+0)}{(x^2+3)^2}\\
&= \frac{(x^2+3)\cdot 2-(2x+5)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}\\
&= \frac{2x^2+6-4x^2-10x}{(x^2+3)^2}\\
&= \frac{6-10x-2x^2}{(x^2+3)^2}
\end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=10u^9\cdot\left(\frac{6-10x-2x^2}{(x^2+3)^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=10\left(\frac{2x+5}{x^2+3}\right)^9\cdot\left(\frac{6-10x-2x^2}{(x^2+3)^2}\right)$$

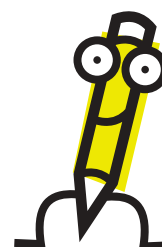
Agora é a sua vez!

Calcular a derivada $\frac{dy}{dx}$ das funções dadas:

(a) $y = (4 - x^3)^8$

(b) $y=\frac{4}{(3x^2-x+1)}$

(c) $y = (x^2 + 3x - 1)^4 \cdot (x^2 - x)$

(d) $y=\left(x^2-\frac{4}{x^3}\right)$

Como conseqüência da regra da cadeia, é possível formular resultados importantes para o cálculo de derivadas.

Generalizações podem ser estabelecidas. Veja a proposição:

Proposição: *Se $y = u^n$, sendo $u = g(x)$ e n um número inteiro não nulo, então:*

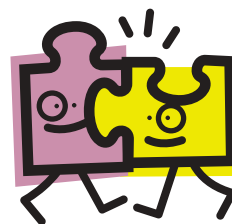
$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

Podemos generalizar e torná-la uma regra para ser usada quando n é um número racional.

Para auxiliá-lo na resolução de exercícios, as regras de derivação serão agrupadas em uma **Tabela de Derivadas**, que você encontra no anexo deste livro.

Nesta tabela as regras de derivação já absorvem a regra da cadeia. Veja as regras iniciais:

(1)	$y = c$	$\Rightarrow$	$y' = 0$
(2)	$y = x$	$\Rightarrow$	$y' = 1$
(3)	$y = c \times u$	$\Rightarrow$	$y' = c \times u'$
(4)	$y = u + v$	$\Rightarrow$	$y' = u' + v'$
(5)	$y = u \cdot v$	$\Rightarrow$	$y' = u \cdot v' + v \cdot u'$
(6)	$y = \frac{u}{v}$	$\Rightarrow$	$y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$
(7)	$y = u^m, \quad (m \neq 0)$	$\Rightarrow$	$y' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'$

Nos próximos exemplos você poderá visualizar a aplicação das regras de derivação e da regra da cadeia. Tenha a tabela de derivadas sempre à mão quando estiver analisando exemplos e resolvendo exercícios que envolvem as derivadas.

Exemplos

Encontrar a derivada das funções:

(a) $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$

Vamos derivar a função encontrando $y' = \left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)'$ usando da regra do quociente:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(x+3)(2x-1)' - (2x-1)(x+3)'}{(x+3)^2} \\
&= \frac{(x+3)(2\cdot 1-0)-(2x-1)(1+0)}{(x+3)^2} \\
&= \frac{(x+3)\cdot 2-(2x-1)\cdot 1}{(x+3)^2} \\
&= \frac{2x+6-2x+1}{(x+3)^2} \\
&= \frac{7}{(x+3)^2}.
\end{aligned}$$

(b) $y = (x^3 + 7x^2 + 8)(x^2 - 3)$

Usando a regra do produto, temos:

$$\begin{aligned}
y' &= (x^3 + 7x^2 + 8)(x^2 - 3)' + (x^3 + 7x^2 + 8)'(x^2 - 3) \\
&= (x^3 + 7x^2 + 8)(2x - 0) + (3x^2 + 7\cdot 2x + 0)(x^2 - 3) \\
&= (x^3 + 7x^2 + 8)(2x) + (3x^2 + 14x)(x^2 - 3) \\
&= 2x^4 + 14x^3 + 16x + 3x^4 + 14x^3 - 9x^2 - 42x \\
&= 5x^4 + 28x^3 - 9x^2 - 26x.
\end{aligned}$$

(c) $y = (3 + 4x^4)^5$

Usando a generalização da regra da potência, temos:

$$\begin{aligned}
y' &= 5(3 + 4x^4)^{5-1}\cdot(3 + 4x^4)' \\
&= 5(3 + 4x^4)^4\cdot(0 + 4\cdot 4x^3) \\
&= 5(3 + 4x^4)^4\cdot(16x^3) \\
&= 80x^3\cdot(3 + 4x^4)^4.
\end{aligned}$$

(d) $y=\sqrt{x^2+1}$

É possível reescrever a função usando expoente fracionário: $y=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$.

Agora, basta derivar y usando a regra da potência:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(x^2+1)' \\
&= \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+0) \\
&= \frac{2x}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \\
&= x\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}}.
\end{aligned}
$$

(e) $y=4x^{-3}+2\sqrt{x}$

Podemos reescrever a raiz quadrada usando expoente fracionário $y=4x^{-3}+2x^{\frac{1}{2}}$ e derivar a função y usando a regra da soma:

$$
\begin{aligned}
y' &= (4x^{-3})'+\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)' \\
&= 4\cdot(-3)x^{-3-1}+2\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \\
&= -12x^{-4}+x^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{-12}{x^4}+\frac{1}{\sqrt{x}}.
\end{aligned}
$$

(f) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x^3+1}$

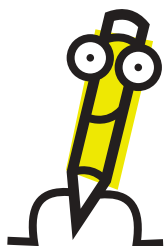
Para derivar esta função, vamos novamente ree
a raiz quadrada como um expoente fracionário: $y = \dfrac{(x^2+3)^{\frac{1}{2}}}{x^3+1}$

Assim, a derivada y' pode ser calculada a partir da regra do quociente:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{(x^3+1)\left[(x^2+3)^{\frac{1}{2}}\right]' - (x^2+3)^{\frac{1}{2}} \cdot (x^3+1)'}{(x^3+1)^2} \\
&= \frac{(x^3+1)\left[\frac{1}{2}(x^2+3)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2+3)'\right] - (x^2+3)^{\frac{1}{2}} \cdot (3x^2+0)}{(x^3+1)^2} \\
&= \frac{(x^3+1)\left[\frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+0)\right] - (x^2+3)^{\frac{1}{2}} \cdot (3x^2)}{(x^3+1)^2} \\
&= \frac{(x^3+1)\left[x(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}\right] - (x^2+3)^{\frac{1}{2}} \cdot (3x^2)}{(x^3+1)^2}.
\end{aligned}
$$

(g) $y = x^2\sqrt{x^3 - x}$

Reescrevendo a função temos: $y = x^2(x^3-x)^{\frac{1}{2}}$. A derivada será dada pela aplicação da regra do produto das funções x^2 e $(x^3-x)^{\frac{1}{2}}$:

$$
\begin{aligned}
y' &= x^2\left[(x^3-x)^{\frac{1}{2}}\right]' + (x^2)'(x^3-x)^{\frac{1}{2}} \\
&= x^2\left[\frac{1}{2}(x^3-x)^{\frac{1}{2}-1}(x^3-x)'\right] + (2x)(x^3-x)^{\frac{1}{2}} \\
&= x^2\left[\frac{1}{2}(x^3-x)^{-\frac{1}{2}}(3x^2-1)\right] + (2x)(x^3-x)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{x^2(x^3-x)^{\frac{1}{2}}(3x^2-1)}{2} + (2x)(x^3-x)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Agora é a sua vez!

Encontrar a derivada das funções:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{4}{x^3}$

(b) $y = (x^4 + x^3 - 2x)^4$

(c) $f(x) = (x^{-3} + 2)(x^2 - x)$

(d) $y = \frac{5 - x^3}{(x+2)^2}$

(e) $g(x)=\dfrac{x^2-x}{\sqrt{4-x^4}}$	(f) $h(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-4}{16}}$

SEÇÃO 5
Derivadas de funções elementares

Após estudar a regra da cadeia e as principais regras de derivação, você pode agora conhecer as regras de derivação que envolvem funções elementares, tais como, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas.

Lembre-se que estas funções foram revisadas na Unidade 1 e a derivada de cada uma delas representa a inclinação da reta tangente à curva em um ponto x qualquer. Além disso, na Tabela de Derivadas (anexa a este livro) você encontra todas as regras de derivação que são apresentadas nesta seção.

Derivadas das funções exponencial e logarítmica

Veja na tabela as regras de derivação para as funções exponencial e logarítmica, lembrando que foram deduzidas a partir do cálculo do limite que define a derivada de uma função qualquer.

Regra	Função	Derivada
Derivada da função exponencial	$y = a^u$ $a > 0; a \neq 1$	$y' = a^u \ln a\ u'$ $a > 0; a \neq 1$
Derivada da função logarítmica	$y = \log_a u$ $a > 0; a \neq 1$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$ $a > 0; a \neq 1$
Derivada da função exponencial composta	$y = u^v$	$y' = v u^{v-1} u' + u^v \ln u\ v'$ $u > 0$

Exemplos

Determinar a derivadas das funções, usando as regras de derivação.

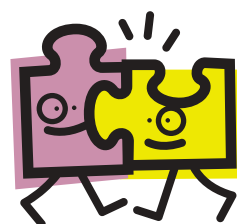
(a) $y = 3^x$

$$y' = 3^x \ln 3 (x)'$$
$$= 3^x \ln 3 (1)$$
$$= 3^x \ln 3.$$

(b) $y = e^x$

$$y' = e^x \ln e (x)'$$ como $\ln e = 1$ e $(x)' = 1$, temos:
$$= e^x \cdot 1 \cdot 1$$
$$= e^x.$$

Veja que é possível generalizar a regra da derivada da função exponencial para o caso em que $a = e$, pois $\ln e = 1$:

$$y = e^u \quad \Rightarrow \quad y' = e^u \cdot u'.$$

(c) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$

$$y'=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}\ln\left(\frac{1}{2}\right)(x^2-2x)'$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}\ln\left(\frac{1}{2}\right)(2x-2)$$
$$=(2x-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=-(2x-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}\ln 2.$$

(d) $y=\log\left(\frac{1}{x}\right)$

$$y'=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x}}\log e$$
$$=\frac{(x^{-1})'}{\frac{1}{x}}\log e$$
$$=\frac{-x^{-2}}{\frac{1}{x}}\log e$$
$$=-x^{-2}\,\frac{x}{1}\log e$$
$$=-\frac{x}{x^2}\log e$$
$$=-\frac{1}{x}\log e=-\frac{\log e}{x}.$$

(e) $y=\ln x$

Lembre que $\ln x=\log_e x$:

$$y'=\frac{x'}{x}\log_e e=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}.$$

É possível generalizar a regra da derivada da função logarítmica quando a base é neperiana, pois $\log_e e = 1$. Assim,

(f) $y = (x^2 - 2)^{x^3}$

$$y' = x^3 (x^2 - 2)^{x^3 - 1} (x^2 - 2)' + (x^2 - 2)^{x^3} \ln (x^2 - 2)(x^3)'$$
$$= x^3 (x^2 - 2)^{x^3 - 1} (2x - 0) + (x^2 - 2)^{x^3} \ln (x^2 - 2)(3x^2)$$
$$= 2x^4 (x^2 - 2)^{x^3 - 1} + (x^2 - 2)^{x^3} (3x^2) \ln (x^2 - 2).$$

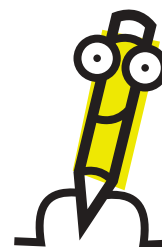
Agora é a sua vez!

Determinar a derivadas das funções, usando as regras de derivação.

(a)

(b) $y = \log_3 (x^2 + 4)$

(c) $y = (x + 1)^{2x + 1}$

(d) $y = 4^{\frac{x+1}{x}}$

Derivadas das funções trigonométricas

Veja as regras de derivação que envolvem as funções trigonométricas e trigonométricas inversas no quadro a seguir.

Regra	Função	Derivada
Derivada da função seno	$y = \text{sen}\, u$	$y' = \cos u \cdot u'$
Derivada da função cosseno	$y = \cos u$	$y' = -\text{sen}\, u \cdot u'$
Derivada da função tangente	$y = \text{tg}\, u$	$y' = \sec^2 u \cdot u'$
Derivada da função cotangente	$y = \text{cotg}\, u$	$y' = -\text{cosec}^2 u \cdot u'$
Derivada da função secante	$y = \sec u$	$y' = \sec u \cdot \text{tg}\, u \cdot u'$
Derivada da função cossecante	$y = \text{cosec}\, u$	$y' = \text{cosec}\, u \cdot \text{cotg}\, u \cdot u'$
Derivada da função arco seno	$y = \text{arcsen}\, u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
Derivada da função arco cosseno	$y = \arccos u$	$y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
Derivada da função arco tangente	$y = \text{arctg}\, u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
Derivada da função arco cotangente	$y = \text{arccotg}\, u$	$y' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$
Derivada da função arco secante	$y = \text{arcsec}\, u$ $\lvert u \rvert \geq 1$	$y' = \dfrac{u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2 - 1}}$ $\lvert u \rvert > 1$
Derivada da função arco cossecante	$y = \text{arccosec}\, u$ $\lvert u \rvert \geq 1$	$y' = \dfrac{-u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2 - 1}}$ $\lvert u \rvert > 1$

Veja como encontrar a derivada da função **y = sen x** *usando a definição.*

Substituindo a função **y = sen x** *no limite que define a derivada:*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen(x+\Delta x) - sen(x)}{\Delta x}.$$

Aplicando em **sen (x + Δx)** *a fórmula trigonométrica:*

$$sen\, A - sen\, B = 2 sen\left(\frac{A-B}{2}\right) cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

sendo **A = x + Δx** *e* **B = x**

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sen\left(\frac{x+\Delta x - x}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x+\Delta x + x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

Dividindo e multiplicando o denominador Δx por 2 temos:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \times \frac{cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)}{2}.$$

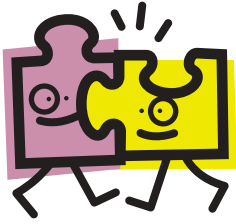
Usando o limite fundamental, é possível dizer que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot 1 \cdot cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)}{2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} cos\left(\frac{2x+0}{2}\right)$$

$$= cos\left(\frac{2x}{2}\right) = cos x.$$

Exemplos

Determinar a derivadas das funções, usando as regras de derivação.

(a) y = sen $(x^2 - 3x + 4)$

$$
\begin{aligned}
y' &= \cos(x^2 - 3x + 4)(x^2 - 3x + 4)' \\
&= \cos(x^2 - 3x + 4)(2x - 3) \\
&= (2x - 3)\cos(x^2 - 3x + 4).
\end{aligned}
$$

Perceba que a expressão $(2x - 3)$ não multiplica o argumento do seno, mas sim, toda a função seno.

(b) $y = \cos\left(\dfrac{x^2+1}{2}\right)$

$$
\begin{aligned}
y' &= -\text{sen}\left(\frac{x^2+1}{2}\right)\left(\frac{x^2+1}{2}\right)' \\
&= -\text{sen}\left(\frac{x^2+1}{2}\right) \times \frac{1}{2}(x^2+1)' \\
&= -\text{sen}\left(\frac{x^2+1}{2}\right) \times \frac{1}{2}(2x+0) \\
&= -\text{sen}\left(\frac{x^2+1}{2}\right) \times \frac{2x}{2} \\
&= -x\,\text{sen}\left(\frac{x^2+1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

(c) $f(x) = \text{cotg}\,\dfrac{1}{x^2}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\text{cosec}^2\frac{1}{x^2} \times \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\text{cosec}^2\frac{1}{x^2} \times (x^{-2})' \\
&= -\text{cosec}^2\frac{1}{x^2} \times (-2x^{-3}) = -\text{cosec}^2\frac{1}{x^2} \times \left(\frac{-2}{x^3}\right) \\
&= \frac{2}{x^3}\text{cosec}^2\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}
$$

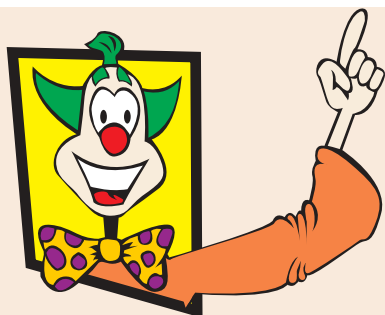
(d) $g(x) = \text{tg}\left(\dfrac{x^2+1}{4-x}\right)$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \sec^2\left(\frac{x^2+1}{4-x}\right)\times\left(\frac{x^2+1}{4-x}\right)' \\
&= \sec^2\left(\frac{x^2+1}{4-x}\right)\times\left(\frac{(4-x)(x^2+1)'-(x^2+1)(4-x)'}{(4-x)^2}\right) \\
&= \sec^2\left(\frac{x^2+1}{4-x}\right)\times\left(\frac{(4-x)(2x+0)-(x^2+1)(0-1)}{(4-x)^2}\right) \\
&= \sec^2\left(\frac{x^2+1}{4-x}\right)\times\left(\frac{8x-2x^2+x^2+1}{(4-x)^2}\right) \\
&= \left(\frac{8x-x^2+1}{(4-x)^2}\right)\sec^2\left(\frac{x^2+1}{4-x}\right).
\end{aligned}$$

(e) $y = \text{arctg}\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}{1+x} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right)}{1+x} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{1+x} \\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.
\end{aligned}$$

(f) $y = (\text{arcsen}\ x^2)^3$

$$\begin{aligned}
y' &= 3(\text{arcsen}\ x^2)^{3-1}(\text{arcsen}\ x^2)' \\
&= 3(\text{arcsen}\ x^2)^2\frac{(x^2)'}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \\
&= 3(\text{arcsen}\ x^2)^2\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.
\end{aligned}$$

Aqui estou eu novamente para falar de coisas **chatas** e **interessantes**....

Não há aluno que não pense dessa forma: algumas disciplinas são interessantes. Outras são chatas.

Faça uma lista das disciplinas que você considera chatas e outra de disciplinas interessantes.

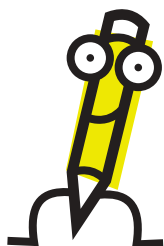
Depois analise a lista das chatas. Identifique a mais chata das chatas.

Mas veja: se ela é a mais chata das chatas, passa a ser extremamente interessante e muda de lista.

Agora, outra disciplina será a mais chata das chatas, o que a torna interessante também.

Assim, a certa altura, todas as disciplinas serão interessantes.

Será assim??!

Pense nisso...

Agora é a sua vez!

Determinar a derivadas das funções, usando as regras de derivação.

(a) $f(x) = \frac{\sec(x+1)}{4}$

(b) $y = \sqrt{\cos x}$

(c) $y = \text{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right)$ (d) $g(x) = -\text{cosec}\,(x^2 + 1)$

(e) $y = \text{tg}\, x + 3\text{cotg}\, x$ (f) $y = 3 \cdot \text{arcotg}\,(x^4)$

Derivadas das funções hiperbólicas

Como as funções hiperbólicas são definidas em termos das funções exponenciais, a tabela com suas regras de derivação é estruturada usando as regras de derivação que já foram vistas.

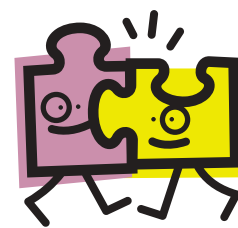
Função	Derivada
$y = \text{senh}\, u$	$y' = \cosh u \cdot u'$
$y = \cosh u$	$y' = \text{senh}\, u \cdot u'$

Para mostrar que a derivada da função **y = senh u** *é igual a* **y' = cosh u·u'** *basta escrever a função seno hiperbólico usando a função exponencial, conforme você já estudou na unidade 1.*

$$y = \text{senh } u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

$$y' = \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)'$$
$$= \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})' = \frac{1}{2}(e^u \cdot u' - e^{-u} \cdot -u')$$
$$= \frac{u'}{2}(e^u + e^{-u}) = \frac{(e^u + e^{-u})}{2}u'$$

Como $\cosh u = \dfrac{(e^u + e^{-u})}{2}$, **y' = cosh u·u'**.

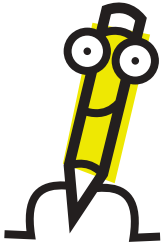
$y = \text{tgh } u$	$y' = \text{sech}^2\, u \cdot u'$
$y = \text{cotgh } u$	$y' = -\text{cosech}^2\, u \cdot u'$
$y = \text{sech } u$	$y' = -\text{sech } u \cdot \text{tgh } u \cdot u'$
$y = \text{cosech } u$	$y' = -\text{cosech } u \cdot \text{cotgh } u \cdot u'$
$y = \text{argsenh } u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$
$y = \text{argcosh } u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$, $u > 1$
$y = \text{argtgh } u$	$y' = \dfrac{u'}{1-u^2}$, $\lvert u \rvert < 1$
$y = \text{argcotgh } u$	$y' = \dfrac{u'}{1-u^2}$, $\lvert u \rvert > 1$
$y = \text{argsech } u$	$y' = \dfrac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}$, $0 < u < 1$
$y = \text{argcosech } u$	$y' = \dfrac{-u'}{\lvert u \rvert \sqrt{1+u^2}}$, $u \neq 0$

Exemplos

Determinar as derivadas das funções hiperbólicas, usando as regras de derivação.

(a) $y = \text{sech}\,(x^2)$

$$y' = \text{sech}\,(x^2) \times \text{tgh}\,(x^2) \times (x^2)'$$
$$= \text{sech}\,(x^2) \times \text{tgh}\,(x^2) \times (2x)$$
$$= 2x\,\text{sech}\,x^2\,\text{tgh}\,x^2.$$

(b) $y = \frac{3}{4}\text{argcotgh}\frac{2}{x^2}$

$$y' = \frac{3}{4}\left(\text{argcotgh}\frac{2}{x^2}\right)'$$
$$= \frac{3}{4} \times \frac{\left(\frac{2}{x^2}\right)'}{1-\left(\frac{2}{x^2}\right)^2} = \frac{3}{4} \times \frac{(2x^{-2})'}{1-\frac{4}{x^4}} = \frac{3}{4} \times \frac{(2 \cdot -2x^{-3})}{\frac{x^4-4}{x^4}} = \frac{3}{4} \times \frac{(-4x^{-3})}{\frac{x^4-4}{x^4}} =$$
$$= \frac{-12}{4} \times \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{x^4-4}{x^4}} = \frac{-3}{x^3} \times \frac{x^4}{x^4-4} = \frac{-3x^4}{x^3(x^4-4)} = \frac{-3x}{x^4-4}.$$

(c) $y = \text{tgh}\,(1 - x^3)$

$$y' = \text{sech}^2\,(1 - x^3) \times (1 - x^3)'$$
$$= \text{sech}^2\,(1 - x^3) \times (0 - 3x^2)$$
$$= -3x^2\,\text{sech}^2\,(1 - x^3).$$

(d) $y = \ln\,(\cosh 3x)$

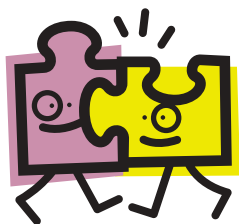
$$y' = \frac{(\cosh 3x)'}{\cosh 3x} = \frac{\text{senh}\,3x \times (3x)'}{\cosh 3x}$$
$$= \frac{\text{senh}\,3x \times (3)}{\cosh 3x} = \frac{3\,\text{senh}\,3x}{\cosh 3x}.$$

Veja que é possível escrever $\text{tgh}\,3x = \dfrac{\text{senh}\,3x}{\cosh 3x}$.
Assim, $y' = 3\ \text{tgh}\ 3x$.

Agora é a sua vez!

Determinar a derivadas das funções, usando as regras de derivação.

(a) $f(x) = \text{tgh}\,(x + 4)^4$ (b) $y = \ln\,(\text{senh}\ 4x)$

(c) $g(x) = (\text{argcosh}\ 4x)^3$ (d) $y = (x + 1)\text{sech}\ x$

SEÇÃO 6

Derivadas sucessivas

Após ter estudado e exercitado as regras de derivação, veja que é possível derivar quantas vezes você achar interessante!

É o que se chama de derivação sucessiva, a derivada da derivada, da derivada, da derivada etc.

As derivadas sucessivas de uma função f são denotadas por:

f'	$\frac{df}{dx}$	Derivada de f ou derivada de primeira ordem de f.
$f'' = (f')'$	$\frac{d^2 f}{dx^2}$	Derivada segunda de f ou derivada de segunda ordem de f.
$f''' = (f'')'$	$\frac{d^3 f}{dx^3}$	Derivada terceira de f ou derivada de terceira ordem de f.
$f^{IV} = (f''')'$	$\frac{d^4 f}{dx^4}$	Derivada quarta de f ou derivada de quarta ordem de f.
$f^{(10)} = (f^{(9)})'$	$\frac{d^{10} f}{dx^{10}}$	Derivada de ordem 10 de f.
$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$	$\frac{d^n f}{dx^n}$	Derivada de ordem **n** de f.

Exemplos

1) Calcular a derivada de 3ª ordem da função $y = x^3 - 4x + 3$.

Para calcular a derivada de 3ª ordem, é necessário derivar 3 vezes a função dada:

$$y' = 3x^2 - 4$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6.$$

2) Determinar a derivada de 2ª ordem da função $f(x) = \sqrt[3]{4 - x^3}$.

Num primeiro momento, vamos reescrever a função f(x)

$$f(x) = (4 - x^3)^{\frac{1}{3}}.$$

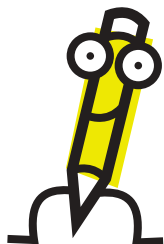
A derivada de 2ª ordem é a derivada da derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(4 - x^3)^{\frac{1}{3}-1}(4 - x^3)'$$
$$= \frac{1}{3}(4 - x^3)^{\frac{-2}{3}}(0 - 3x^2) = -x^2(4 - x^3)^{\frac{-2}{3}}.$$

Para derivar novamente, perceba que agora a função está escrita como o produto de $-x^2$ por $(4 - x^3)^{\frac{-2}{3}}$. Assim, usando a regra do produto temos:

$$f''(x) = (f'(x))'$$
$$= (-x^2)\left((4 - x^3)^{\frac{-2}{3}}\right)' + (4 - x^3)^{\frac{-2}{3}}(-x^2)'$$
$$= (-x^2)\left(-\frac{2}{3}(4 - x^3)^{\frac{-2}{3}-1}(4 - x^3)'\right) + (4 - x^3)^{\frac{-2}{3}}(-2x)$$
$$= (-x^2)\left(-\frac{2}{3}(4 - x^3)^{\frac{-5}{3}}(0 - 3x^2)\right) + (4 - x^3)^{\frac{-2}{3}}(-2x)$$
$$= (-x^2)\left(2x^2(4 - x^3)^{\frac{-5}{3}}\right) + (4 - x^3)^{\frac{-2}{3}}(-2x)$$
$$= (-2x^4)(4 - x^3)^{\frac{-5}{3}} + (4 - x^3)^{\frac{-2}{3}}(-2x).$$

3) Determinar a derivada de 2ª ordem da função $y = \text{tg}\,(x + 1)$.

$$y' = \sec^2(x + 1) \times (x + 1)'$$
$$= \sec^2(x + 1) \times (1 + 0)$$
$$= \sec^2(x + 1)$$
$$= [\sec(x + 1)]^2.$$

$$y'' = 2[\sec(x+1)]^{2-1} \times [\sec(x+1)]'$$
$$= 2\sec(x+1) \times \sec(x+1) \times \text{tg}(x+1) \times (x+1)'$$
$$= 2\sec(x+1) \times \sec(x+1) \times \text{tg}(x+1)$$
$$= 2\sec^2(x+1)\text{tg}(x+1).$$

4) Determinar a derivada de ordem n = 100 da função $g(x) = \cos x$.

Para determinar a derivada solicitada, vamos derivar a função $g(x)$ sucessivamente:

$$g'(x) = -\text{sen}\, x$$
$$g''(x) = -\cos x$$
$$g'''(x) = \text{sen}\, x$$
$$g^{IV}(x) = \cos x$$

Perceba que as derivadas começarão a se repetir, visto que $g(x) = g^{IV}(x)$. Pelo menos, não será necessário derivar 100 vezes!

Para determinar $g^{(100)}(x) = \frac{d^{100}g}{dx^{100}}$, perceba que, a partir da 4ª ordem, as derivadas começam a se repetir. Vamos numerar estas primeiras derivadas:

$g'(x) = -\text{sen}\, x$	(1)	(5)	(9)	E assim sucessivamente, até que se chegue em **n = 100**, que será igual ao $\mathbf{g^{IV}}$.
$g''(x) = -\cos x$	(2)	(6)	(10)	
$g'''(x) = \text{sen}\, x$	(3)	(7)	(11)	
$g^{IV}(x) = \cos x$	(4)	(8)	(12)	Assim, $\mathbf{g^{(100)}(x) = g^{IV}(x) = \cos x}$

Dividindo 100 por 4 teremos como resultado 25. Isto significa que até chegar em n = 100, as derivadas passarão 25 vezes em $g^{IV}(x) = \cos x$ e encerrarão nesta ordem.

Se fosse 103, ao dividirmos por 4 teremos 25 inteiros e o resto será igual a 3. Então:

$$g^{(103)}(x) = g'''(x) = \text{sen}\, x$$

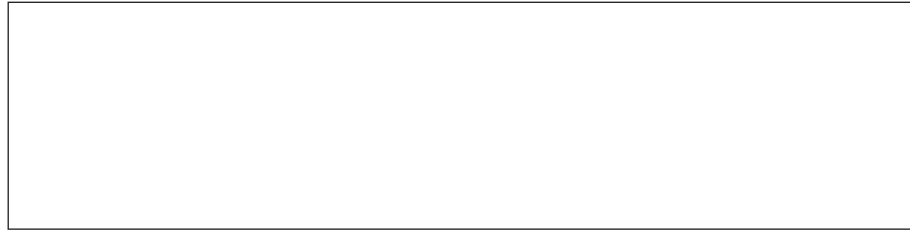
Agora é a sua vez!

1) Encontrar a derivada de 4ª ordem da função $y = x^5 - x^4 + 3x^2 - \frac{x}{3}$.

2) Determine a derivada de 2ª ordem das funções:

(a) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ (b) $g(x) = 3 \sec (4 - x)$

3) Determine a derivada de 3ª ordem da função $y = -\ln x$.

4) Determine a derivada de ordem 153 de $y = e^x$.

SEÇÃO 7
Derivação implícita

Existem algumas funções que são escritas na forma implícita.

Você sabe o que isto significa?

Para entender, veja a equação:

$$x^2 + y - 3 = 0$$

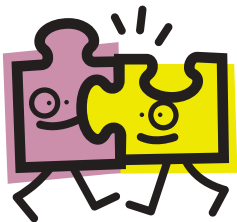
Perceba que, ao isolar a variável y, você terá uma função do segundo grau, dada por:

$$y = 3 - x^2$$

Portanto, uma função $y = f(x)$ é definida na forma implícita se puder se escrita como uma equação $F(x,y) = 0$ e, ao substituir y por $f(x)$, esta equação se torna uma identidade.

Na equação $x^2 + y - 3 = 0$, ao substituir $y = 3 - x^2$, tem-se:

$$\begin{aligned} x^2 + (3 - x^2) - 3 &= 0 \\ x^2 + 3 - x^2 - 3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

ou seja, uma identidade.

Mas por que falar em derivação de funções na forma implícita?

Isto acontece, pois nem sempre é possível encontrar a função na forma explícita, ou ainda, se possível, há casos em que existem infinitas formas explícitas de uma mesma função.

Por exemplo, não é possível encontrar $y = f(x)$ na equação

$$y^3 + x^2y - \ln xy = 0.$$

Em $x^2 + y^2 = 9$ existem infinitas maneiras de escrever $y = f(x)$, dentre elas,

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

$$y = -\sqrt{9 - x^2}.$$

Portanto, justifica-se a importância de se determinar a derivada das funções escritas na forma implícita, sem que seja necessário isolar uma das variáveis em relação às demais.

Para derivar uma função escrita na forma $F(x,y) = 0$ aplicam-se as regras de derivação e a regra da cadeia sem que seja necessário escrever $y = f(x)$. Os exemplos irão ajudá-lo a entender melhor este tipo de derivação.

Exemplos

1) Encontrar y' da função derivável $y = f(x)$, definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 9$.

Para encontrar y' vamos derivar ambos os lados da equação:

$$(x^2 + y^2)' = (9)'$$

$$(x^2)' + (y^2)' = (9)'$$

Usando a regra da cadeia temos:

$$2x + 2yy' = 0.$$

Observação: *Perceba que a derivada da variável independente (x) é igual a 1 e a derivada da variável dependente (y) é igual a y'.*

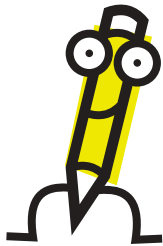
Isolando y' teremos:

$$2yy' = -2x$$

$$y' = -\frac{2x}{2y}$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

2) Determinar y' das funções $y = f(x)$ definidas implicitamente pelas equações:

(a) $xy^3 + 2x^3 = y - 4y$

$$(xy^3 + 2x^3)' = (y - 4y)'$$
$$(xy^3)' + (2x^3)' = (y)' - (4y)'$$
$$x(y^3)' + x'y^3 + 6x^2 = y' - 4y'$$
$$3xy^2y' - y' + 4y' = -y^3 - 6x^2$$
$$y'(3xy^2 - 1 + 4) = -y^3 - 6x^2$$
$$y'(3xy^2 + 3) = -y^3 - 6x^2$$
$$y' = \frac{-y^3 - 6x^2}{3xy^2 + 3}.$$

(b) $x^2 + y^2 = y\cos x$

$$(x^2 + y^2)' = (y\cos x)'$$
$$(x^2)' + (y^2)' = (y\cos x)'$$
$$2x + 2yy' = y(\cos x)' + y'\cos x$$
$$2yy' - y'\cos x = -y\,\text{sen}\, x - 2x$$
$$y'(2y - \cos x) = -y\,\text{sen}\, x - 2x$$
$$y' = \frac{-y\,\text{sen}\, x - 2x}{2y - \cos x}.$$

Newton e Leibniz usaram diferentes notações para a derivada de uma função. Por mais de 50 anos, houve uma grande disputa sobre qual era a melhor notação. Venceu a notação de Leibniz, que denota a derivada $\frac{dy}{dx}$ como uma razão das diferenciais dy e dx.

Agora é a sua vez!

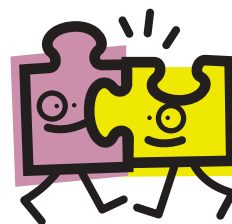
Encontre y' das funções definidas implicitamente pelas equações:

(a) $xy - 3x^2y^3 = 4$

(b) $x\cos xy - x^3 + 4x^2 = 3xy$

(c) $3x - x^2 + y^2 = 9y - 4$

Já no século XVII Leibniz introduz os conceitos de variável, constante e parâmetro, bem como a notação dx e dy para designar a menor das diferenças em x e em y.

SEÇÃO 8
Diferencial

Até esta seção, quando você determinava *y'* estava, automaticamente, determinando $\frac{dy}{dx}$ que é uma outra notação para a derivada da função $y = f(x)$.

Nesta secão, você entenderá o significado de *dy* e *dx* que permite tratar $\frac{dy}{dx}$ como uma razão que representa taxas de variação.

Para entender o conceito de diferencial, veja a Figura 3.7.

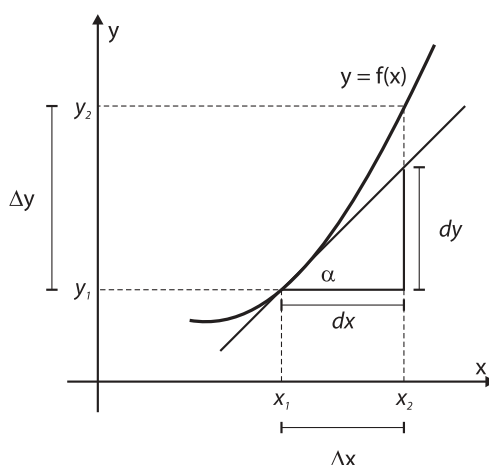



Figura 3.7 Representação dos acréscimos e diferenciais

É possível representar uma variação na variável *x* como sendo $\Delta x = x_2 - x_1$. A variação de *x* origina uma variação de *y*, chamada Δy e representada por:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$
$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

Veja na Figura 3.7 a representação de Δx e Δy.

Os símbolos *dy* e *dx* que aparecem na derivada são chamados de diferenciais. Assim, temos que a diferencial da variável independente *x* será dada por:

$$dx = \Delta x.$$

Por outro lado, a diferencial da variável dependente y, será dada por:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

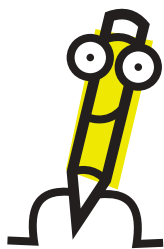
Como $dx = \Delta x$, então

$$dy = f'(x)dx$$
$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Veja na Figura 3.7 a representação dos diferenciais dy e dx.

Ainda nesta figura, perceba que quando a distância Δx for pequena, então a diferença entre Δy e dy torna-se cada vez menor. Na prática, quando considera-se Δx tendendo a zero, é possível dizer que Δy é aproximadamente igual a dy ($\Delta y \cong dy$).

Exemplos

1) Calcular o acréscimo Δy e a diferencial dy para a função $f(x) = x^2 + 2x + 1$ quando $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}01$.

Num primeiro momento, vamos determinar Δy fazendo:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_2) - f(x_1)\\ &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)\\ &= f(2 + 0{,}01) - f(2)\\ &= f(2{,}01) - f(2)\\ &= (2{,}01)^2 + 2\times2{,}01 + 1 - (2^2 + 2\times2 + 1)\\ &= 4{,}0401 + 4{,}02 + 1 - 9\\ &= 0{,}0601.\end{aligned}$$

A diferencial dy será $dy = f'(x)dx$, sendo $f'(x)$ a derivada de $f(x) = x^2 + 2x + 1$:

$$f'(x) = 2x + 2$$

Ainda, $dx = \Delta x = 0{,}01$ e $x = 2$:

$$dy = (2x + 2)dx$$
$$dy = (2\times 2 + 2)0{,}01$$
$$dy = (4 + 2)0{,}01$$
$$dy = 0{,}06.$$

Observar que a diferença entre Δy e dy é pequena.

2) Determinar Δy e dy na função $y = \sqrt{x}$ no ponto $x = 4$ com $\Delta x = 0{,}5$.

$$\Delta y = f(4 + 0{,}5) - f(4)$$
$$= \sqrt{4{,}5} - \sqrt{4}$$
$$= 0{,}12132.$$

$$dy = (\sqrt{x})' dx$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 0{,}5 = \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0{,}5 = \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot 0{,}5 =$$
$$= \frac{0{,}5}{4} = 0{,}125.$$

3) Use diferenciais para estimar o erro na medida da resistência elétrica *R* de um fio, que é dada por $R = \frac{k}{r^2}$, sendo k uma constante e r o raio do fio. No momento em que o raio $r = 2$ foi medido, acredita-se que houve um erro de 0,05.

Podemos escrever a função que mede a resistência elétrica de um fio como sendo R = f(r). Do enunciado do problema, é possível dizer que Δr = 0,05 e, portanto, $dr = \Delta r = 0{,}05$.

Vamos então calcular dR, que é o erro na medida da resistência elétrica do fio, fazendo:

$$dR = R' dr$$
$$= \left(\frac{k}{r^2}\right)' \Delta r$$
$$= k(r^{-2})' \Delta r$$
$$= k(-2r^{-3}) \cdot 0{,}05$$
$$= \frac{-2 \cdot k \cdot 0{,}05}{2^3} = -0{,}0125k.$$

Síntese

Após o estudo desta unidade, você já começa a ter uma base importante para que possa compreender as diversas aplicações que as derivadas possuem em situações práticas.

Perceba que o assunto tratado nesta unidade, as derivadas, exige de você um esforço na realização de exercícios. Não porque sejam difíceis, mas porque é importante que você exercite muito para fixar bem as regras de derivação que foram apresentadas.

A partir de funções mais simples, você conseguirá derivar qualquer função mais complicada, desde que tenha em mãos a tabela de derivadas e os conceitos básicos bem entendidos.

Não siga para a próxima unidade sem antes realizar todos os exercícios propostos e tirar suas dúvidas com o professor tutor.

Bom estudo!

Atividades de auto-avaliação

1) Determine a derivada das funções, usando a definição:

(a) $f(x) = x^2 + x$

(b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$

(c) $h(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{3}$

2) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = x^2 - 3x$ no ponto $x = 3$. Faça o gráfico da função y e represente neste gráfico a reta tangente calculada.

3) Seja a função $y = 3x^3 + x^2 - 3$:

(a) Ache a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo [1,4].

(b) Ache a taxa de variação instantânea de y em relação a x.

(c) Ache a taxa de variação instantânea de y em relação a x no ponto $x = \frac{1}{2}$.

4) Determine a derivada das funções dadas:

(a) $y = \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^4}$ (b) $y = \frac{2x+3}{4-x^3}$

(c) $y = \sqrt{(2x^4-1)(5x^3+6x)}$ (d) $y = \sqrt[4]{x^2+2x+1}$

(e) $f(t) = \sqrt{3t} + \sqrt{\frac{4}{t}}$ (f) $g(x) = 3\sqrt{\cos x}$

(g) $h(t) = \arccos(\ln t)$

(h) $r(t) = \cosh(t^2 + 1)$

(i) $r(\theta) = \left(\dfrac{4}{5\theta}\right)^{\sqrt{\theta}}$

(j) $f(x) = x^3 \ln\left(\dfrac{3x+1}{x^3}\right)$

(l) $y = [\text{argsenh}\,(x+1)]^3$

(m) $y = \sqrt[3]{\sec x}$

(n) $y = 3\text{tg}\, xy$

5) Para as funções escritas na forma implícita, calcule a derivada $\frac{dy}{dx}$:

(a) $y^2 = 4x - 8$

(b) $x^2 + y^2 - 4\sqrt{y} = 9$

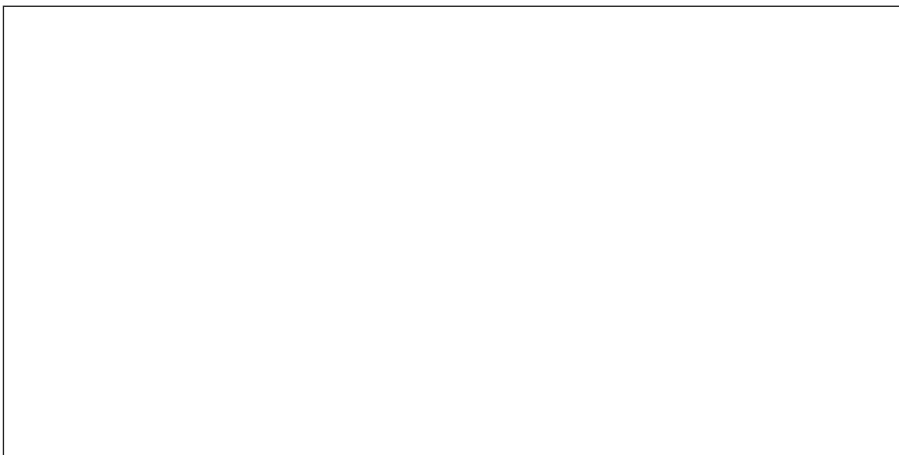
(c) $xy^2 - x^4 = 3y$

6) Calcule a derivada sucessiva até a ordem n indicada:

(a) $y = \frac{3}{x-4}$, $n = 4$

(b) $f(x) = \frac{1}{2e}$, $n = 3$

(c) $v(t) = \ln 3t$, $n = 2$

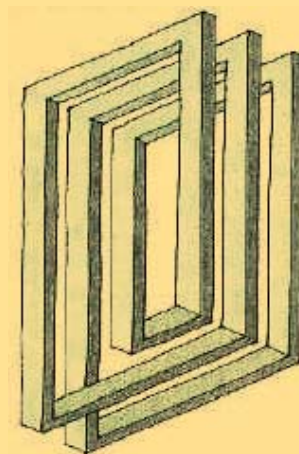
7) O volume de um cano flexível varia, aproximadamente, 0,1cm³. Sabendo-se que a altura é constante e sempre igual a três vezes o raio da base, use diferenciais para determinar a correspondente variação do raio. (o volume de um cilindro é $V = \pi r2h$)

Saiba mais

Ao final desta unidade, você deve ter percebido que é importante a realização de exercícios que envolvam as regras de derivação, para que você não tenha dúvidas quando precisar derivar alguma função.

Consulte o capítulo 4 do livro Cálculo A, que está disponível nas bibliotecas da Unisul, para obter mais exercícios sobre este assunto.

E não fique com dúvidas, consulte o professor tutor sempre que achar necessário!

UNIDADE 4

Aplicações das derivadas

Objetivos de Aprendizagem

Ao final desta unidade você deverá estar apto a:

- Identificar o uso das derivadas em problemas que envolvem taxa de variação;
- Resolver problemas envolvendo o cálculo de derivadas;
- Analisar o comportamento de funções usando derivadas;
- Discutir procedimentos de otimização;
- Aplicar derivadas no cálculo de limites indeterminados.

Seções de estudo

Para início de conversa

Nesta unidade você vivenciará a resolução de problemas cuja modelagem e resolução requerem o uso de derivadas. Em geral, são problemas que envolvem uma taxa de variação. Outra aplicação muito importante está na análise do comportamento das funções. Agora é o momento de você dominar poderosas ferramentas para a leitura gráfica e para a identificação de propriedades e características das funções.

Questões motivadoras

O que é taxa de variação?

Por que a velocidade e aceleração são consideradas interpretações físicas da derivada?

O que significa um ponto crítico? E um ponto de inflexão?

Afinal, quem foi L´Hospital?

SEÇÃO 1

A derivada como taxa de variação

Na introdução do conceito de derivada você teve a oportunidade de analisar a interpretação geométrica da derivada. Vamos agora retomar esse contexto apresentando a derivada como taxa de variação. Você terá a oportunidade de verificar que temos também a interpretação física da derivada.

O que é uma taxa de variação?

De forma simples, pode-se pensar em variação como mudança em relação ao tempo, mas você terá a oportunidade de vivenciar problemas em que outras variáveis são consideradas. Por exemplo, um economista pode querer estudar como o custo da produção de um produto varia de acordo com o número de produtos produzidos.

Matematicamente, quando temos $y = f(x)$, a **taxa média de variação de y em relação a x** no intervalo $[x_1, x_2]$ é dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

sendo $\Delta x = x_2 - x_1$ a variação de x e $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ a variação correspondente de y.

Em tempo
Observe que a palavra "instantânea" lembra tempo, daí o fato de associarmos taxa de variação como mudança em relação ao tempo.

É possível conhecer a taxa de variação num ponto específico x_1, neste caso, estamos diante de uma taxa de variação instantânea da função $y = f(x)$. Lembrando da definição de derivada pode-se afirmar que essa taxa é encontrada usando a expressão

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Lembrando que $x_2 = x_1 + \Delta x$,
pode-se reescrever a expressão anterior

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Você poderá visualizar a taxa de variação nos exemplos apresentados.

Velocidade e Aceleração

O exemplo clássico da Física relacionado com velocidade e aceleração é uma taxa de variação e podemos considerá-lo como a interpretação física de derivada.

Vamos discutir a interpretação física de derivada?
Um corpo se desloca ao longo de um eixo s e a sua posição em função do tempo t é modelada por uma função $s = f(t)$.

O deslocamento do objeto no intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$ é $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$, e sua **velocidade média** nesse intervalo é

$$v_m = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

A **velocidade instantânea** é a derivada da posição em relação ao tempo dada por

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

A taxa com que a velocidade de um corpo varia é a aceleração do corpo. É possível dizer que a aceleração mede o quanto o corpo ganha ou perde em velocidade. Usando a idéia de taxa de variação, é possível constatar que a aceleração é a taxa de variação da velocidade.

A aceleração média no intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$ é

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

A aceleração instantânea é a derivada da velocidade em relação ao tempo ou a derivada de segunda ordem da posição em relação ao tempo. Pode-se escrever

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

(1) velocidade média

$$v_m = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

(2) velocidade instantânea

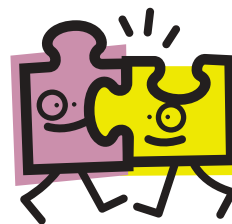
$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

(3) aceleração média

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

(4) aceleração instantânea

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Exemplos

1) No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição é modelada pela função $s(t) = 6t - t^2$. Determinar:

(a) a velocidade média do corpo no intervalo de tempo [1,4];
(b) a velocidade do corpo no instante $t = 2$;
(c) a aceleração média no intervalo de tempo [0,3];
(d) a aceleração instantânea no instante $t = 4$.

Para resolver os itens solicitados vamos utilizar as expressões guardadas na caixa de surpresas do nosso amigo REC. Temos que:

(a) A velocidade média do corpo no intervalo de tempo [1,4] é dada por

$$
\begin{aligned}
v_m &= \frac{s(4) - s(1)}{4 - 1} \\
&= \frac{(6 \times 4 - 4^2) - (6 \times 1 - 1^2)}{3} \\
&= \frac{3}{3} = 1 \text{ unidade de velocidade.}
\end{aligned}
$$

(b) Para calcular a velocidade do corpo no instante $t = 2$ é necessário encontrar a derivada da função $s(t) = 6t - t^2$ no ponto $t = 2$.

$$
\begin{aligned}
&v(t) = \frac{ds}{dt} = 6 - 2t \\
&v(2) = 6 - 2 \times 2 = 2 \text{ unidades de velocidade.}
\end{aligned}
$$

(c) A aceleração média no intervalo [0,3] é dada por

$$
a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(3) - v(0)}{3 - 0} = \frac{0 - 6}{3} = -3 \text{ unidades de aceleração.}
$$

O sinal negativo mostra que a velocidade do corpo está diminuindo no intervalo de tempo dado.

Você já deve ter ouvido falar no famoso matemático e astrônomo italiano Galileu Galilei (1564-1642). Ele é considerado o fundador da mecânica e da física moderna. Sem recursos para freqüentar a Universidade de Pisa, foi autodidata em matemática, tornando-se professor na Universidade de Pisa e depois na Universidade de Pádua. Nessa última, desenvolveu as conclusões do movimento de queda livre sob a ação da gravidade e o movimento dos planetas.

(d) A aceleração instantânea no tempo $t = 4$ é a derivada da velocidade no ponto $t = 4$. Assim,

$v'(t) = -2$

$v'(4) = -2$ unidades de aceleração.

2) Se Galileu tivesse deixado cair uma pedra do topo da torre de Pisa, 58,5 metros acima do solo, sua altura t segundos depois de cair teria sido $s = 58{,}5 - 4{,}88t^2$ em relação ao solo.

(a) Qual teria sido a velocidade e a aceleração da pedra no instante t?

(b) Quanto tempo a pedra levaria, aproximadamente, para atingir o solo?

(c) Qual teria sido a velocidade da pedra no momento do impacto?

Vamos usar as fórmulas já estabelecidas para resolver os itens propostos.

(a) A velocidade da pedra no instante t é $v = \frac{ds}{dt} = -9{,}76$ m/s. A aceleração é dada por $a = \frac{dv}{dt} = -9{,}76 \approx 9{,}8$ m/s² (valor já esperado, pois é a aceleração da gravidade).

(b) Quando a pedra chega o solo temos $s = 0$.

Assim para saber o tempo que a pedra levaria para atingir o solo vamos fazer

$$58{,}5 - 4{,}88t^2 = 0$$
$$t^2 = \frac{58{,}5}{4{,}88} = 11{,}99$$
$$t = \sqrt{11{,}99}$$
$$t \approx 3{,}45\,s$$

Observar esse resultado na Figura 4.1.

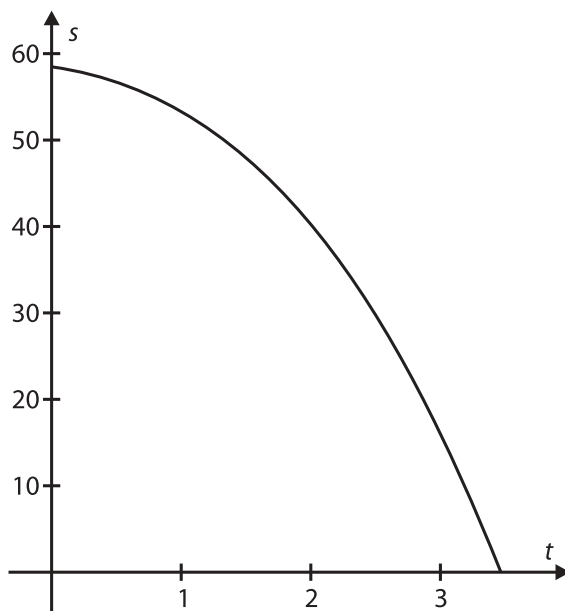



Figura 4.1 Gráfico da função $s = 58{,}5 - 4{,}88t^2$

(c) A velocidade da pedra no momento do impacto é dada por

$$v(3{,}45) = -9{,}76 \times 3{,}45 \approx 33{,}67 \text{ m/s}$$

3) Seja $s(t) = t^4 - 9t^3 + 24t^2 - 16t$ para $t \in [0,6]$ a equação do movimento de uma partícula. Considerar s medido em centímetros e t em segundos.

(a) Determinar a velocidade no instante t.
(b) Determinar a aceleração no instante t.
(c) Em que momento a velocidade se anula?
(d) Em que momento a aceleração se anula?
(e) Supondo que o movimento é na horizontal, tomando o instante $t = 0$ como referência, podemos dizer que a partícula está andando para frente? E para trás?

(f) Determinar a aceleração do corpo toda vez que a velocidade for nula.

Observe que neste problema estamos buscando uma análise sobre as características do movimento da partícula. Para facilitar a visualização dos resultados vamos fazer o gráfico da função $s = s(t)$ na Figura 4.2.

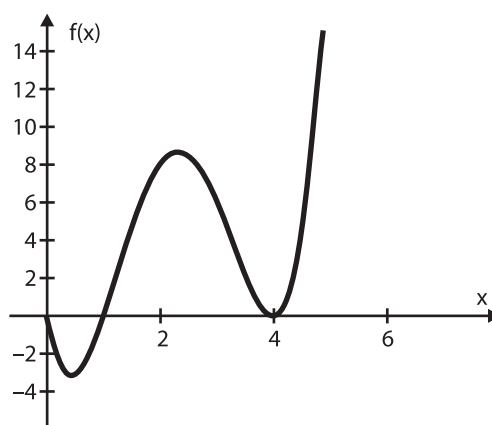



Figura 4.2 Gráfico da função $s(t) = t^4 - 9t^3 + 24t^2 - 16t$

(a) A velocidade no instante t é dada por

$$v(t) = s'(t) = 4t^3 - 27t^2 + 48t - 16.$$

(b) A aceleração no instante t é dada por

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t^2 - 54t + 48.$$

(c) Para encontrar os instantes em que a velocidade se anula, vamos fazer $v(t) = 0$, isto é, $4t^3 - 27t^2 + 48t - 16 = 0$. Observe que estamos diante da resolução de uma equação do terceiro grau. Basta analisar o gráfico da Figura 4.2 para constatar que $t = 4$ é uma das raízes. Aplicando Ruffini (discutido na Unidade 1), vamos achar a expressão do segundo grau que vai nos dar duas outras raízes aproximadas.

Veja o Ruffini:

	4	–27	48	–16
4		16	–44	16
	4	–11	4	0

Assim obtemos que $4t^3 - 27t^2 + 48t - 16 = (t - 4)(4t^2 - 11t + 4)$.

Vamos, agora, calcular as raízes da expressão do segundo grau $4t^2 - 11t + 4 = 0$. Utilizando a fórmula de Bhaskara podemos escrever

$$t = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 4 \times 4}}{2 \times 4} = \frac{11 \pm \sqrt{57}}{8}.$$

Assim, temos dois valores aproximados para t

$$t_1 = \frac{11 + \sqrt{57}}{8} \approx 2,32$$
$$t_2 = \frac{11 - \sqrt{57}}{8} \approx 0,43$$

Portanto, a velocidade se anula nos instantes 2,32 e 0,43 segundos.

(d) De forma similar ao item (b) podemos identificar os pontos em que a aceleração se anula. Basta achar as raízes da equação $12t^2 - 54t + 48 = 0$.

Aplicando Bhaskara vamos ter

$$t = \frac{-(-54) \pm \sqrt{(-54)^2 - 4 \times 12 \times 48}}{2 \times 12} = \frac{54 \pm \sqrt{612}}{24} = \frac{54 \pm 6\sqrt{17}}{24} = \frac{54}{24} \pm \frac{6\sqrt{17}}{24} = \frac{9}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4}.$$

Assim teremos dois instantes:

$$t_1 = \frac{9 + \sqrt{17}}{4} \approx 3,28$$
$$t_2 = \frac{9 - \sqrt{17}}{8} \approx 1,22.$$

(e) Supondo que o movimento é na horizontal, tomando o instante *t=0* como referência, podemos dizer que a partícula está andando para frente? E para trás?

Para responder essas questões basta analisar o comportamento da velocidade, pois a velocidade informa o ritmo do deslocamento e o sentido do movimento. Quando a velocidade é positiva a partícula está se deslocando para frente e quando a velocidade é negativa a partícula está se deslocando para trás. Para facilitar a visualização vamos fazer o gráfico da função velocidade (ver Figura 4.3).

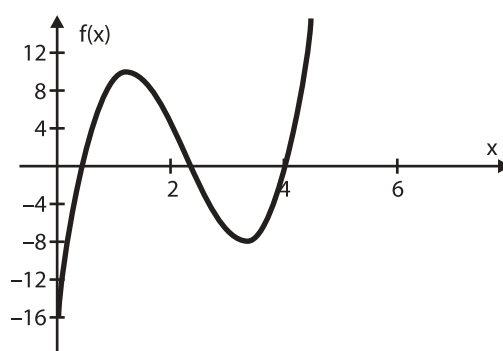



Figura 4.3 Gráfico da função velocidade

Da Figura 4.3 podemos afirmar que:

velocidade positiva	$4t^3 - 27t^2 + 48t - 16 > 0$	gráfico acima do eixo t
velocidade negativa	$4t^3 - 27t^2 + 48t - 16 < 0$	gráfico abaixo do eixo t

Usando os cálculos anteriores das raízes da função $v(t)$ concluímos que:

- A velocidade é positiva nos intervalos [0,43;2,32] e [4,6] (lembre-se que estamos trabalhando somente o intervalo $t \in [0,6]$). Portanto, nesses intervalos a partícula está se deslocando para frente.

- A velocidade é negativa nos intervalos [0;0,43] e [2,32;4]. Portanto, nesses intervalos a partícula está se deslocando para trás.

(f) Para determinar a aceleração do corpo toda vez que a velocidade for nula, basta fazer o cálculo da imagem da função aceleração nos pontos 0,43; 2,32 e 4. Assim

$$a(t) = 12t^2 - 54t + 48$$

$$a(0{,}43) = 12(0{,}43)^2 - 54(0{,}43) + 48 \approx 27 \text{ cm/s}^2$$

$$a(2{,}32) = 12(2{,}32)^2 - 54(2{,}32) + 48 \approx -12{,}7 \text{ cm/s}^2$$

$$a(4) = 12(4)^2 - 54(4) + 48 \approx 24 \text{ cm/s}^2$$

Agora é a sua vez!

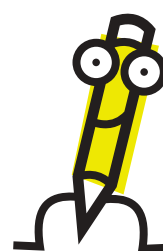
1) A função posição de um corpo é dada por $s(t) = 2t^3 - 6t^2 - 18t$, para $t \geq 0$. Quando a partícula atinge a velocidade de 5 m/s?

2) Uma pedra é atirada verticalmente para cima, na superfície da Lua, com velocidade de 32 m/s e atinge uma altura de $s = 24t - \frac{4}{5}t^2$ metros em t segundos.

(a) Determinar a velocidade e aceleração da pedra no instante t.

(b) Qual a altura atingida pela pedra?

(c) Quanto tempo a pedra leva para atingir metade de sua altura máxima?

(d) Faça uma pesquisa na Internet sobre a gravidade na Lua e verifique se as informações obtidas são compatíveis com a sua resposta do item (a).

3) Seja $s(t) = -t^3 + 7t^2 - 10t$ para $t \in [0,5]$ a equação do movimento de uma partícula. Considere que s é medido em centímetros e t em segundos.

(a) Determine a velocidade no instante $t = 1,5$ s.

(b) Determine a aceleração no instante $t = 1$ s.

(c) Em que momento a velocidade se anula?

(d) Em que momento a aceleração se anula?

(e) Supondo que o movimento é na horizontal, tomando o instante $t = 0$ como referência, pode-se dizer que a partícula está andando para frente? E para trás?

(f) Determine a aceleração do corpo toda vez que a velocidade for nula.

Densidade Linear

Se uma barra for homogênea, então sua densidade linear é uniforme e está definida como a massa por unidade de comprimento. Em geral usa-se a letra grega ρ para denotar a densidade linear que pode ser medida em quilogramas por metro (kg/m).

Quando a barra não for homogênea é possível, a partir de experimentos, estabelecer uma função $m = f(x)$ que dá a massa da barra medida a partir da extremidade esquerda até um ponto x (veja a Figura 4.4).

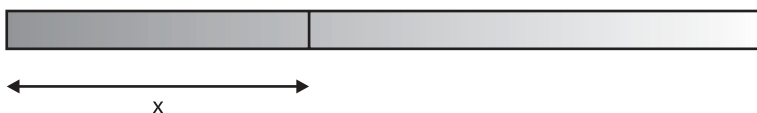
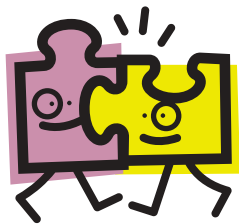



Figura 4.4 Barra com massa não homogênea

Para determinar a massa de um pedaço da barra localizada entre $x = x_1$ e $x = x_2$ pode-se fazer $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$. Assim a densidade média linear do pedaço da barra é

$$\rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

A densidade linear no ponto $x = x_1$ é a derivada da massa em relação comprimento, isto é,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}.$$

Exemplo

Uma barra não homogênea de 12 metros de comprimento foi analisada e observou-se que a massa da barra, medida a partir da extremidade esquerda até um ponto x, é $m(x) = 2x\sqrt{x}$, sendo que x é medido em metros e a massa em quilogramas.

(a) Qual a densidade média do pedaço da barra, com 3,1 metros, localizado no extremo direito?

(b) Qual a densidade linear em qualquer ponto da barra?

Para analisar este exemplo, observe a Figura 4.5.

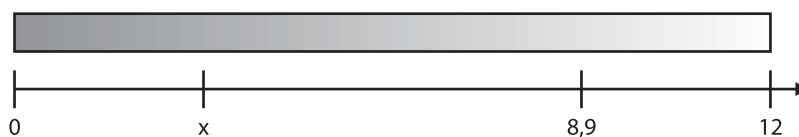



Figura 4.5 Barra não homogênea de 12 m

Olá amigos!

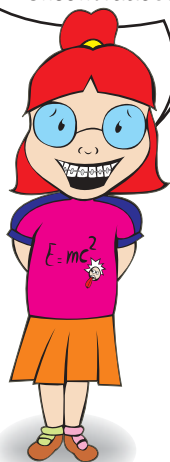
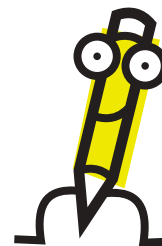
Vai ser legal você estar com a sua calculadora em mãos, pois vamos fazer cálculos aproximados.

Confira os resultados encontrados.

(a) A densidade média do pedaço da barra assinalado na Figura 4.2 é 9,69 kg/m.

$$\rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta x}$$
$$= \frac{m(12) - m(8,9)}{12 - 8,9}$$
$$= \frac{2 \times 12\sqrt{12} - 2 \times 8,9\sqrt{8,9}}{3,1}$$
$$= \frac{30,0359}{3,1} \approx 9,69 \text{ kg/m}.$$

(b) A densidade linear em qualquer ponto da barra, é dada pelo cálculo da derivada da função $m(x) = 2x\sqrt{x}$. Assim,

$$\rho = \frac{dm}{dx} = (2x\sqrt{x})' = (2x^{3/2})' = 2 \times \frac{3}{2} x^{1/2} = 3\sqrt{x} \text{ kg/m}.$$

Agora é a sua vez!

A massa da parte de uma barra de metal que está situada entre o extremo direito e um ponto x metros à direita é $2x^3$ kg. Encontre a densidade linear quando x for:

(a) 2 metros;
(b) 3 metros.

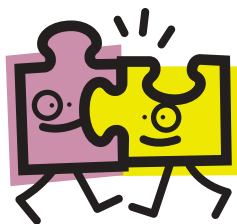
Em que ponto a densidade é maior? E menor?

Custo e rendimento marginais

Você já ouviu falar em custo marginal?
É um termo usado na área da Economia definido matematicamente com recursos de derivadas.

O custo de produção $c(x)$ é uma função do número de unidades produzidas, denotada por x. O custo marginal da produção é a taxa de variação do custo em relação ao nível de produção, portanto, é a derivada da função custo em relação ao número de unidades produzidas.

Teoricamente, o custo marginal é aproximadamente igual ao custo adicional para produzir uma unidade a mais. A informação obtida pelo cálculo do custo marginal pode ser importante para a tomada de decisão de uma empresa.

Com similar interpretação, é possível discutir rendimento marginal.

Exemplo

Seja $c(x)=\frac{1}{5000}x^3+\frac{1}{100}x^2+3x+200$ reais o custo de produção de x peças automotivas e $r(x)=\frac{1}{5000}x^3+\frac{1}{100}x^2+9x+200$ representa o rendimento da venda de x peças.

(a) Se a empresa produz 10 peças por dia, qual será o custo adicional aproximado para produzir uma peça a mais por dia?

(b) Qual o aumento estimado no rendimento da venda das 11 peças?

(c) Qual é o custo de fabricação da 11ª peça?

Para resolver esse exemplo vamos aplicar derivadas.

(a) Lembrando que o custo adicional aproximado para produzir uma peça a mais por dia é o custo marginal, temos

$$c(x)=\frac{1}{5000}x^3+\frac{1}{100}x^2+3x+200$$
$$c'(x)=\frac{3x^2}{5000}+\frac{x}{50}+3$$
$$c'(10)=\frac{3\times10^2}{5000}+\frac{10}{50}+3$$
$$c'(10)=3,26.$$

O custo marginal é R$ 3,26.

(b) O rendimento marginal solicitado é R$ 9,26. De fato,

$$r(x)=\frac{1}{5000}x^3+\frac{1}{100}x^2+9x+200$$
$$r'(x)=\frac{3x^2}{5000}+\frac{x}{50}+9$$
$$r'(10)=9,26.$$

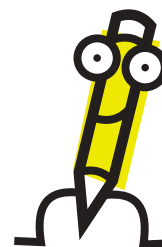
(c) O custo de fabricação da 11ª peça não envolve derivadas, basta fazer

$$c(11)-c(10)=234,47-231,20=3,27$$

Portanto, temos um custo real de R$ 3,27.

Observe que o custo real da 11ª peça é aproximadamente igual ao custo marginal quando $x = 10$.

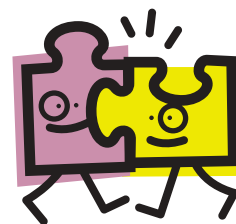
Agora é a sua vez!

Suponha que o custo total de fabricação de x unidades de um certo produto seja dado pela função $c(x) = 3x^2 + x + 500$. Usando a análise de custo marginal apresente o custo aproximado de fabricação da 30ª unidade. Calcule o custo real de fabricação da 30ª unidade.

Aplicações em geral

É possível estabelecer aplicações do uso de taxa de variação em quase todas as áreas do conhecimento, inclusive áreas não exatas como Psicologia e Sociologia. Neste item você conhecerá exemplos variados, sem que se esgotem as diferentes aplicações.

Exemplos

1) Uma corrente existe sempre que a carga elétrica se move. Se ΔQ for a quantidade de carga que passa através de uma superfície durante um período de tempo Δt, então a corrente média durante esse intervalo de tempo é definida como

$$i_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Se fizermos o limite dessa corrente média sobre intervalos de tempo cada vez menores, obteremos o que chamamos de corrente i em um dado instante t, isto é,

$$i = \frac{dQ}{dt}.$$

2) Ao adicionar um bactericida em um meio em que as bactérias estavam crescendo, a população de bactérias continuou a crescer por um período de tempo e posteriormente começou a diminuir. O tamanho da população poderia ser medido usando-se uma função do tempo (medido em horas). Analisar a taxa de variação dessa população nos instantes 0 horas, 100 horas e 200 horas, considerando que a função que modela a situação é $f(t) = 10000 + 200t - t^2$.

Para analisar a situação proposta basta fazer a derivada da função dada e calcular a taxa nos pontos solicitados. Portanto,

$$f(t) = 10000 + 200t - t^2$$
$$f'(t) = 200 - 2t$$

$f'(0) = 200$ bactéria/hora
$f'(100) = 0$ bactéria/hora
$f'(200) = -200$ bactéria/hora.

Observe a Figura 4.6 que mostra a função e as declividades das retas tangentes à curva aos pontos dados, representando o aumento (valor positivo da taxa de variação), zero e diminuição (valor negativo da taxa de variação) da população.

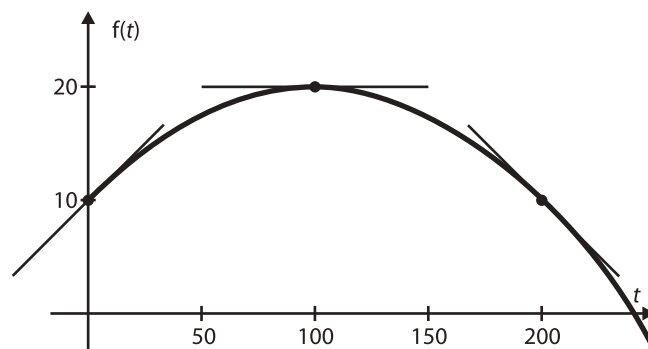



Figura 4.6 Crescimento e decrescimento de bactérias

3) Um reservatório de água potável teve a sua válvula inferior de drenagem aberta para fins de limpeza. Observou-se o escoamento na faixa graduada em metros que mede a profundidade do reservatório. Essa observação foi registrada na tabela a seguir.

t (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y (metros)	5,00	4,05	3,2	2,45	1,80	1,25	0,80	0,45	0,20	0,05	0

(a) Encontrar a taxa de esvaziamento do reservatório no instante t.

(b) Quando a altura da água no reservatório diminuirá mais rapidamente? E mais lentamente?

(c) Representar graficamente $y = f(t)$ e $\frac{dy}{dt}$. Que observações podem ser feitas?

Para desenvolver este problema vamos contar com a ajuda da Teca.

Vou sugerir o uso do software livre Graph para auxiliar o desenvolvimento deste problema. Se você ainda não dispõe desse software vá até o endereço http://www.padowan.dk/graph, para baixar o programa.

Você não acha que será mais fácil resolver o problema se conhecermos a lei de formação da função?

Coloque o conjunto de pontos da tabela usando a ferramenta **Function** *e* **Insert point series**. *Após o* **OK** *você já visualiza na tela o conjunto de pontos delineando uma curva.*

Para saber a lei de formação da função basta fazer **Function** *e* **Insert trendline**. *Escolha a opção* **Polynomial** *e* **Order 2**. *Após o* **OK**, *você visualiza a curva e a lei de formação da função que aparece no canto superior da tela. Neste exemplo, 0,05x^2 – x + 5 (veja a Figura 4.7).*

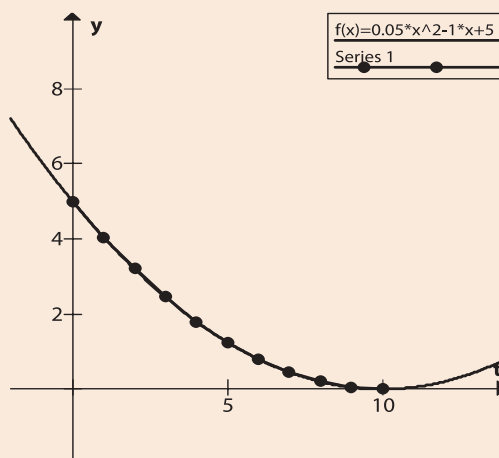



Figura 4.7 Série de pontos no Graph

Muito simples!

Portanto, com a ajuda dos recursos tecnológicos podemos definir a função

$$y = 0{,}05t^2 - t + 5.$$

(a) Para encontrar a taxa de esvaziamento do reservatório no instante t, vamos achar a derivada da função

$$y = 0{,}05t^2 - t + 5$$
$$\frac{dy}{dt} = 0{,}10t - 1 \text{ metro/min.}$$

(b) A altura da água no reservatório diminuirá mais rapidamente quando temos a taxa de variação zerando, isto é, no tempo $t = 10$ minutos temos $\frac{dy}{dt} = 0$. O menor valor da taxa de variação está no início do processo em $t = 0$ quando temos $\frac{dy}{dt} = -1$ metro/minuto. Portanto, a altura da água no reservatório diminui mais lentamente no início do processo em $t = 0$.

(c) A representação gráfica de $y = f(t)$ e $\frac{dy}{dt}$ pode ser visualizada na Figura 4.8. Podemos constatar os resultados obtidos nos itens (a) e (b). A função $y = f(t)$ é decrescente no intervalo considerado $t \in [0,10]$ e a função taxa de variação ou também dita **velocidade de escoamento** é sempre crescente.

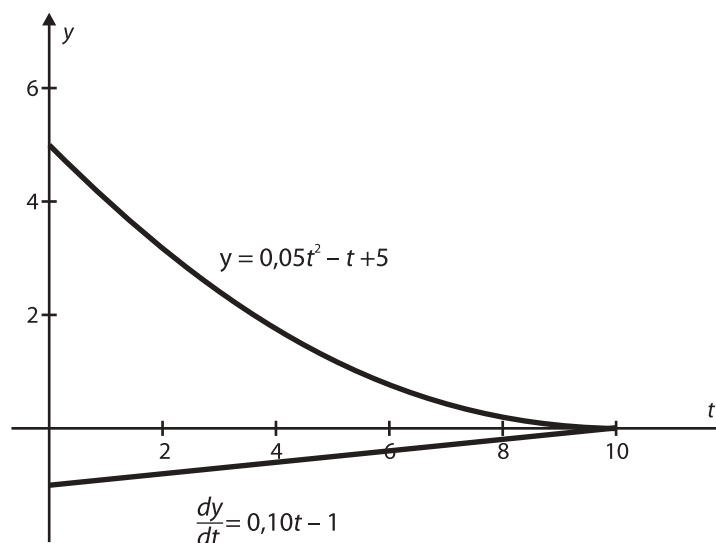
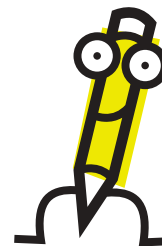



Figura 4.8 Gráfico da função $y = f(t)$e da sua derivada

Agora é a sua vez!

1) A disseminação do sarampo em uma escola foi analisada através da função $f(t)=\frac{200}{1+e^{5-t}}$ sendo t o número de dias decorridos desde o aparecimento do primeiro caso e $f(t)$ o número total de alunos com sarampo. Calcule a taxa de contágio (taxa de variação do número de alunos com sarampo no decorrer do tempo). Faça o gráfico das funções envolvidas e verifique a possibilidade de identificar:

(a) o número inicial de estudantes com sarampo;

(b) quantos alunos ficarão doentes;

(c) em que dia a taxa de contágio é maior.

2) Se um gás for mantido em um cilindro a uma temperatura constante T, a pressão P estará relacionada com o volume V de acordo com a fórmula $P=\frac{RT}{V-1}-\frac{2}{V^2}$, sendo R uma constante. Calcule a taxa de variação da pressão em relação ao volume.

3) No laboratório de Física o movimento de uma partícula ao longo de um eixo horizontal foi observado e registrado na tabela que segue

t (s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y (cm)	0	9	8	3	0	5	24	63	128	225

(a) Usando recurso computacional encontrar a função que modela esse movimento.

(b) Qual a velocidade da partícula no instante $t = 4$?

(c) Qual a aceleração da partícula no instante $t = 4$?

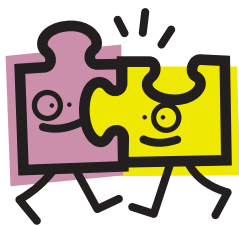
SEÇÃO 2

Taxas de variação relacionadas

Em muitas situações problema tem-se duas variáveis x e y como funções de outra variável t. As variáveis x e y podem estar relacionadas por uma equação, assim as taxas de variação $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ estão relacionadas também por uma equação.

Os exemplos que seguem mostram diferentes situações envolvendo esse tipo de taxa de variação.

Para a interpretação das situações é importante ter muita atenção, pois você vai trabalhar com um número maior de variáveis. Para facilitar, veja alguns passos auxiliares:

- Leia o problema cuidadosamente para destacar todas as variáveis envolvidas.
- Monte um quadro auxiliar colocando todas as informações contidas no problema.
- Esboce representações gráficas para a identificação correta das simbologias e os relacionamentos entre as variáveis.
- Expresse a equação geral que relaciona as variáveis do problema.
- Visualize a conveniência de trabalhar com a equação geral na forma explícita.
- Expresse as taxas de variações solicitadas.
- Aplique os dados do problema para a solução final.

Exemplos

1) À *1 h* o carro de Maria está a *25 km* ao sul do carro de José. Se o carro de Maria está se movimentando para o oeste, em linha reta, com a velocidade de *60 km/h* e o carro de José está indo para o sul com a velocidade de *80 km/h*, determine a razão na qual varia a distância entre os carros à *1 hora e 30 minutos*.

Vamos seguir os passos sugeridos. Após a leitura do problema vamos montar um quadro. Veja uma sugestão.

Variáveis e taxas	Símbolos	Unidades de medida	Carro de Maria	Carro de José	Dados iniciais	Dados solicitados
Tempo	t	hora	Localizado no ponto A	Localizado no ponto B	1 hora $t = 0$	1h30min $t = ½$
velocidade	v	km/hora	60 km/h	80 km/h		
Distância entre os carros	s	km			25 km	
Taxa de variação da distância entre os carros	$\frac{ds}{dt}$					?

Vamos fazer uma representação gráfica para visualizar as posições dos carros. Observe que não estamos preocupados com a formalização de escalas.

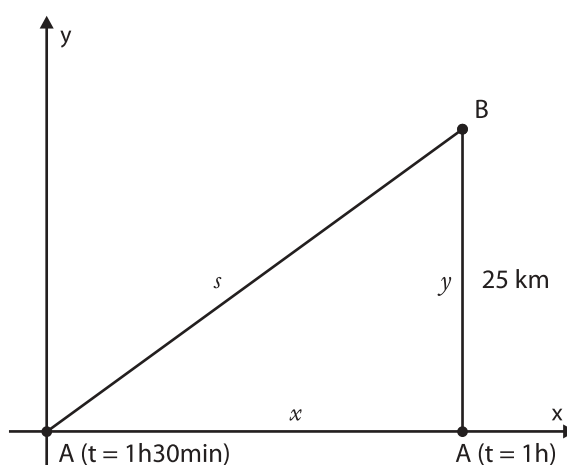



Figura 4.9 Posição dos carros

Para expressar a equação geral do problema que relaciona s, x e y é necessário lembrar do conceito de velocidade (taxa de variação da distância em relação ao tempo) e do Teorema de Pitágoras. Assim,

$x = 60t$ (distância percorrida pelo carro de Maria em direção oeste)

$y = 25 - 80t$ (posição do carro de José assinalada no eixo vertical)

$s^2 = x^2 + y^2$ (distância entre os dois carros)

Usando essas expressões podemos escrever a distância entre os dois carros como função do tempo

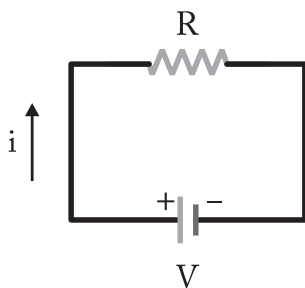
$$s = \sqrt{(60t)^2 + (25 - 80t)^2} \text{ ou}$$
$$s = \sqrt{10000t^2 - 4000t + 625}.$$

Estamos assim prontos para encontrar a taxa de variação $\frac{ds}{dt}$. Temos,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(10000t^2 - 4000t + 625)^{-\frac{1}{2}}(20000t - 4000)$$
$$= \frac{20000t - 4000}{2\sqrt{10000t^2 - 4000t + 625}}.$$

Considerando que $t = \frac{1}{2}$ temos

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{20000\frac{1}{2} - 4000}{2\sqrt{10000\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4000\frac{1}{2} + 625}}$$
$$= \frac{6000}{2\sqrt{1125}}$$
$$= \frac{3000}{15\sqrt{5}}$$
$$= \frac{200}{\sqrt{5}} \approx 89{,}44 \text{ km/hora}.$$

A taxa de variação da distância entre os dois carros em relação ao tempo, após meia hora de percurso, é 89,44 km/hora.

2) Em um circuito elétrico temos a tensão V (volts), a corrente I (em ampères) e a resistência R (ohms) relacionadas pela expressão $V = RI$. Vamos supor que V esteja aumentando a uma taxa de 1 volt/s, enquanto I está diminuindo a uma taxa de $\frac{1}{3}$ A/s. Qual a taxa com que a resistência está variando quando $V = 10$ volts e $I = 3$ ampères?

Vamos colocar os dados do problema num quadro.

Variáveis e taxas	**Símbolos**	**Unidades de medidas**	**Dados iniciais**	**Dados solicitados**
Tensão	V	volt		10
Corrente	I	ampère		3
Resistência	R	ohms		
Tempo	t	segundo		
Taxa de variação de V em relação a t	$\frac{dV}{dt}$	volt/s	1	
Taxa de variação de I em relação a t	$\frac{dI}{dt}$	ampères/s	$-\frac{1}{3}$	
Taxa de variação de R em relação a t	$\frac{dR}{dt}$	ohms/s		?

A expressão que relaciona as variáveis V, R e I é dada por $V = RI$. A partir dessa relação aplicando a diferenciação implícita, discutida na seção 7 da Unidade 3,

$$V = RI$$

$$\frac{dV}{dt} = I\frac{dR}{dt} + R\frac{dI}{dt}.$$

Vamos explicitar $\frac{dR}{dt}$, pois esta é a taxa que queremos calcular

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{I}\left(\frac{dV}{dt} - R\frac{dI}{dt}\right)$$

Podemos substitui o valor de R por $\dfrac{V}{I}$

$$\frac{dR}{dt}=\frac{1}{I}\left(\frac{dV}{dt}-\frac{V}{I}\frac{dI}{dt}\right).$$

Estamos prontos para aplicar os dados para a solução do problema

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt}&=\frac{1}{I}\left(\frac{dV}{dt}-\frac{V}{I}\frac{dI}{dt}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{10}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\\&=\frac{1}{3}\left(1+\frac{10}{9}\right)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{19}{9}=\frac{19}{27}\approx 0{,}704 \text{ ohms/s.}\end{aligned}$$

A taxa de variação da resistência quando
V = 10 volts e I = 3 ampères é 0,704 ohms/s.

3) Quando uma placa circular de metal é aquecida, seu raio aumenta a uma taxa de 0,02 cm/min. A que taxa a área da placa aumenta quando seu raio é de 25 mm?

Vamos colocar os dados do problema no quadro auxiliar.

Variáveis e taxas	**Símbolos**	**Unidades de medidas**	**Dados iniciais**	**Dados solicitados**
raio	r	cm		25mm = 0,025cm
área	A	cm^2		
tempo	t	min		
taxa de variação do raio em relação ao tempo	$\frac{dr}{dt}$	cm/min	0,02	
taxa de variação da área em relação ao tempo	$\frac{dA}{dt}$	cm^2/min		?

Da Geometria sabemos que a área de um círculo é dada pela fórmula

$$A = \pi r^2.$$

Podemos assim encontrar a taxa de variação fazendo a derivada como segue

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{dA}{dr} \times \frac{dr}{dt} \\ &= 2\pi r \times 0,02 \\ &= 0,04\pi r.\end{aligned}$$

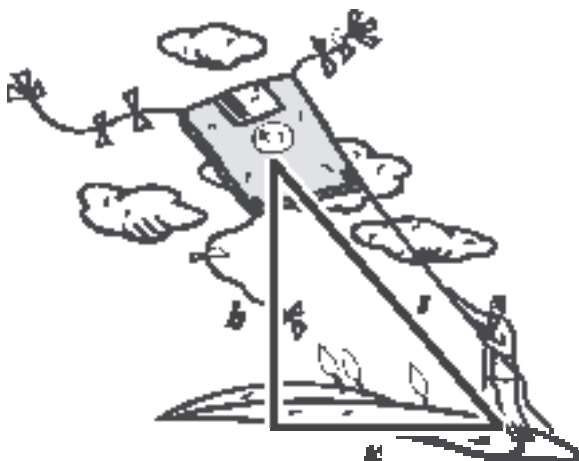
Quando $r = 0,025$ cm temos que

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= 0,04 \times 3,14 \times 0,025 \\ &= 0,00314.\end{aligned}$$

Portanto, a taxa de variação da área da placa
quando o raio é 25 mm é 0,00314 cm^2/min.

Observação: Você percebeu que no quadro realizamos a conversão da unidade de comprimento? Essa é uma das vantagens do uso do quadro – visualização imediata da necessidade de compatibilizar o sistema de unidades.

4) Uma pessoa empina uma pipa a *90 metros* de altura. O vento afasta a pipa horizontalmente em relação à posição da pessoa no solo a uma ve-

locidade de *7 m/s*. A que taxa a pessoa deve soltar a linha, quando a pipa está a *152 m* de distância?

Vamos montar o quadro auxiliar.

Variáveis e taxas	Símbolos	Unidades de medidas	Dados iniciais	Dados solicitados
altura	h	m	90	
velocidade	$v = \frac{dx}{dt}$	m/s	7	
tamanho do fio	s	m		152
deslocamento horizontal da pipa	x	m		
taxa de variação do tamanho do fio em relação ao tempo	$\frac{ds}{dt}$	m/s		?

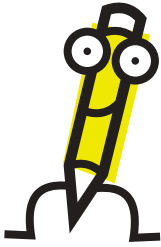
Observando o triângulo retângulo assinalado na ilustração, vamos escrever

$$s^2 = x^2 + h^2$$
$$s^2 = x^2 + 90^2$$
$$s = (x^2 + 90^2)^{1/2}.$$

Assim a taxa de variação pode ser calculada

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 + 90^2)^{-1/2} \cdot 2x \times \frac{dx}{dt}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 90^2}} \times \frac{dx}{dt}.$$

Quando $s = 152$ m temos que $x \approx 122{,}49$ m. De fato, basta aplicar o Teorema de Pitágoras, assim a solução do problema é dada por

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{x=122,49} = \frac{122{,}49}{152} \times 7$$
$$\approx 5{,}64 \text{ m/s}.$$

Quando a pipa está a 152 m de distância, a pessoa deve soltar a linha com uma taxa de variação de, aproximadamente, 5,64 m/s.

Agora é a sua vez!

1) A areia cai de uma esteira transportadora a uma taxa de 15 m^3/min no topo de um monte com formato cônico. A altura do monte sempre tem $\frac{2}{8}$ do diâmetro da base. A que taxa variará:

(a) a altura;

(b) o raio quando o monte tiver 4 m de altura?

2) Uma partícula se desloca ao longo da parábola $y = x^2 + 1$ no primeiro quadrante, de modo que a ordenada x cm aumenta a uma taxa constante de 12 cm/s. Qual a taxa do ângulo de inclinação θ da reta que liga a partícula à origem quando $x = 2$ cm?

3) Dois lados de um triângulo medem 3m e 5m, e o ângulo entre eles está crescendo a uma taxa de 0,02 rad/s. Encontre a taxa segundo a qual a área está crescendo quando o ângulo entre os lados do comprimento fixo é $\frac{\pi}{3}$.

4) Uma luz está no alto de um poste de 4,5 m de altura. Uma criança de 1 metro se afasta do poste à razão de 1,1 m/s. A que taxa se move a ponta de sua sombra quando ela está a 5 m do poste? A que taxa aumenta o comprimento de sua sombra?

SEÇÃO 3

Análise do comportamento de funções

As derivadas podem ser utilizadas para analisarmos propriedades e características das funções objetivando-se a análise do comportamento destas funções. Nesta seção, você vai estudar definições e teoremas que formam um conjunto de poderosas ferramentas no contexto da otimização.

3.1 Máximos e mínimos

Vamos discutir os pontos extremos de uma função $y = f(x)$ utilizando sempre a visualização gráfica. Essa estratégia permite identificar de forma mais imediata propriedades e características das funções. Observe a Figura 4.10 e analise pontos que você considera extremos da função.

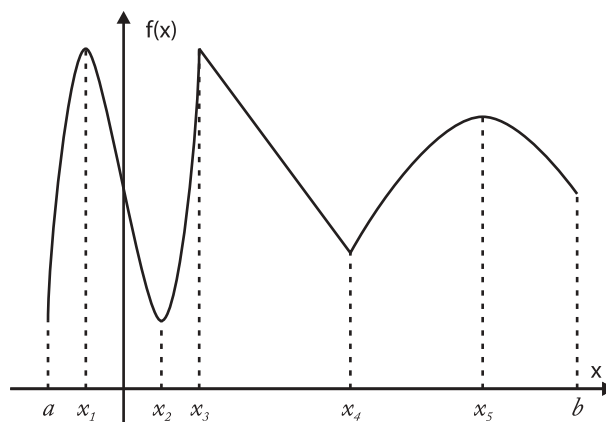



Figura 4.10 Função com pontos extremantes

A função representada na figura está definida no intervalo [a,b] e apresenta pontos extremantes em x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5. As imagens desses pontos são ditas máximos e mínimos relativos da função. No caso apresentado temos que:

- $f(x_1), f(x_3)$ e $f(x_5)$ são máximos relativos;
- $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são mínimos relativos.

Exemplo

A função $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{13}{2}x^2+15x$, apresentada na Figura 4.11 tem:

- um máximo relativo em $x = 1$, pois existe o intervalo (0,2) tal que $f(1) \geq f(x)$ para todo $x \in (0,2)$;
- um mínimo relativo em $x = -3$, pois existe o intervalo (–4,0) tal que $f(-3) \leq f(x)$ para todo $x \in (-4,0)$;
- um mínimo relativo em $x = 5$, pois existe o intervalo (2,6) tal que $f(5) \leq f(x)$ para todo $x \in (2,6)$.

Observe bem os intervalos e pontos citados na Figura 4.11 para que você possa entender bem a definição apresentada.

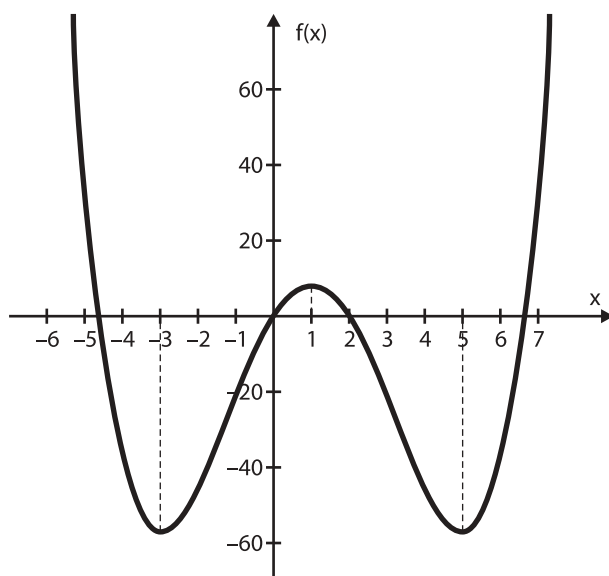
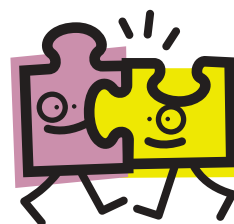



Figura 4.11 Gráfico da função $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{13}{2}x^2+15x$

Olá! Vou aparecer muitas vezes nesta seção!

Se você está diante de um ponto c pertencente ao domínio de uma função **y = f(x)**, *pode dizer que:*

- **y = f(x)** tem um **máximo relativo em *c***, se e somente se **f(x) ≤ f(c)** para qualquer **x** em um intervalo aberto que contenha ***c***.
- **y = f(x)** tem um **mínimo relativo em *c***, se e somente **f(x) ≥ f(c)** para qualquer **x** em um intervalo aberto que contenha ***c***.

Você deve estar se perguntando: *e a aplicação da derivada?*

Podemos concluir os resultados do exemplo usando derivadas, veja a proposição:

Proposição 1: *Se uma função $f(x)$ possui valores máximos ou mínimos relativos em um ponto c interior de seu domínio e se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.*

Observe que essa proposição apresenta uma condição necessária para que o ponto *c* seja um ponto de máximo ou mínimo, mas não é suficiente. Assim, podemos ter a situação em que $f'(c) = 0$ e a função não ter um extremo relativo em *c*.

Podemos ainda ter a situação em que a derivada não existe em c e estarmos diante de um ponto de máximo ou mínimo relativo. Observe essas considerações nas Figuras 4.12 e 4.13.

Observe o gráfico!

No ponto *x=1* a derivada se anula. De fato

$$f(x) = (x - 1)^3 + 1$$

$$f'(x) = 3(x - 1)^2$$

$$f'(1) = 0$$

Não estamos diante de máximo ou mínimo!

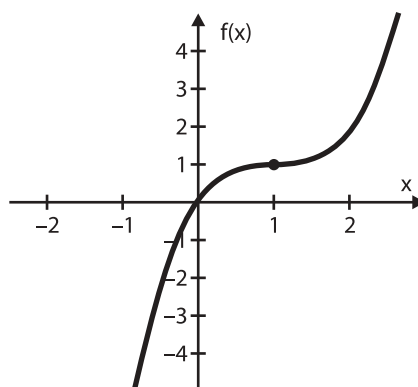



Figura 4.12
Gráfico da função $f(x) = (x - 1)^3 + 1$

Portanto, esse exemplo ilustra o fato de que a proposição apresenta uma condição necessária, mas não suficiente para que se tenham máximos e mínimos relativos.

No gráfico 4.13 você pode observar a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 2 \\ -3x+11, & x > 2 \end{cases}$$

Essa função não é derivável no ponto $x = 2$, pois estamos diante de um ponto anguloso. Entretanto, em $x = 2$ temos um ponto de máximo da função. Novamente chamamos a atenção do fato da Proposição 1 ser apenas uma condição necessária para a existência de pontos extremos.

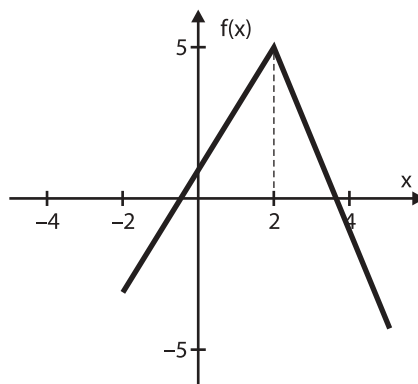



Figura 4.13 Função com um ponto no qual a derivada não existe.

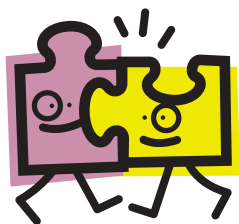
Podemos agora resgatar a questão motivadora do início desta unidade.

O que é um ponto crítico?

***Definição 1:** Um ponto c pertencente ao domínio de uma função y = f(x) é dito **ponto crítico de f(x)** se f'(c) = 0 ou f'(c) não existe.*

Como encontrar pontos de máximos ou mínimos absolutos de uma função contínua em um intervalo fechado?

Sugerimos os seguintes passos:

1) encontre todos os pontos críticos da função;
2) calcule a imagem dos pontos críticos e dos pontos extremos do intervalo;
3) tome o maior e o menor dentre os valores obtidos.

Exemplos

1) Encontrar os valores máximos e mínimos da função
$f(x)=\frac{-x^4}{4}-x^3+x^2+4x$ no intervalo [–4,2].

Para encontrar os pontos extremos vamos usar a proposição 1. Considere a derivada da função dada

$$f(x)=\frac{-x^4}{4}-x^3+x^2+4x$$
$$f'(x)=-x^3-3x^2+2x+4.$$

Os pontos críticos são encontrados fazendo $f'(x) = -x^3 - 3x^2 + 2x + 4 = 0$. Para resolver a equação do terceiro grau verificamos por inspeção que $x = -1$ é raiz. Assim, aplicando o dispositivo de Ruffini encontramos a expressão do segundo grau que vai nos dar as outras duas raízes.

	–1	–3	2	4
–1		1	2	–4
	–1	–2	4	0

Assim, o polinômio do segundo grau que vai nos dar as outras duas raízes tem coeficientes dados na última linha do dispositivo, isto é, $-x^2 - 2x + 4 = 0$. Aplicando Bhaskara vamos encontrar

$$x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{5}.$$

Se colocarmos na calculadora, vamos obter as seguintes raízes aproximadas –3,24 e 1,24.

Portanto, temos 3 pontos críticos (–1, –3,24 e 1,24). Observe que estamos diante de uma função polinomial, portanto, a derivada existe em todo o conjunto dos reais.

Vamos fazer uma tabela para calcular as imagens dos pontos críticos e dos pontos extremos do intervalo, denotando-os por pontos candidatos.

Pontos candidatos	f(x)
–4	0
–3,24	3,99
–1	–2,25
1,24	3,99
2	0

Portanto, o máximo absoluto da função $f(x) = \frac{-x^4}{4} - x^3 + x^2 + 4x$ no intervalo

[–4,2] é 3,99 que é a imagem dos pontos –3,24 e 1,24. O mínimo absoluto no intervalo [–4,2] é –2,25 que é a imagem do ponto –1.

Agora vamos apresentar na Figura 4.14 o gráfico da função analisada. Você vai poder observar que a visualização gráfica auxilia na identificação dos pontos. Portanto, sempre que você tiver em mãos um *software* para fazer gráficos, vale a pena utilizá-lo, pois facilita a identificação dos algebrismos necessários para formalizar os resultados.

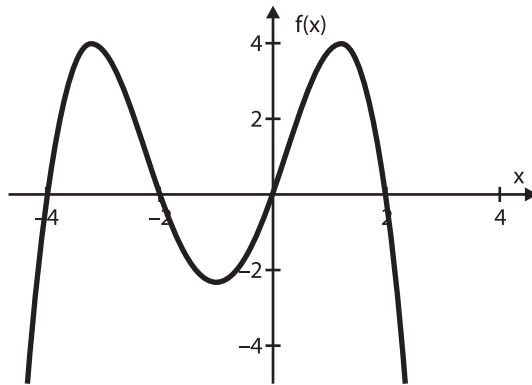



Figura 4.14 Gráfico da função $f(x)=\frac{-x^4}{4}-x^3+x^2+4x$

2) Analisar graficamente a existência de pontos críticos na função

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leq 1 \\ -x+3, & 1<x<3 \\ (3-x)(x-5), & x\geq 3 \end{cases}$$

Na Figura 4.15 temos a visualização do gráfico da função dada.

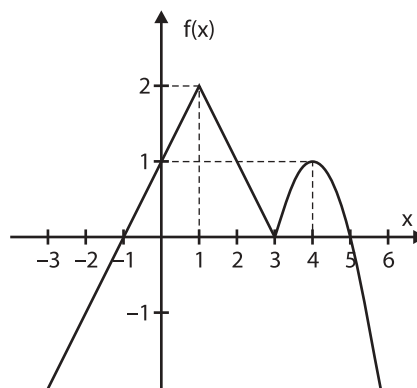
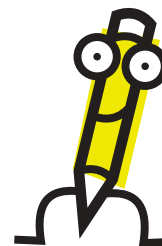



Figura 4.15 Gráfico da função f(x)

A simples inspeção do gráfico propicia a solução do exemplo. Temos que em $x = 1$ e $x = 3$ a derivada da função não existe (temos pontos angulosos). No ponto $x = 4$ temos a suavidade na curva, mas percebemos que a reta tangente a curva no ponto é paralela ao eixo dos x. Isto significa que a derivada é nula, portanto temos também um ponto crítico.

Agora é a sua vez!

1) Determinar os pontos críticos das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 5$

(b) $f(x) = x^2 + x - 2$

(c) $f(x) = 2x + 3$

2) Analisar graficamente a existência de pontos críticos na função

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \leq 1 \\ (x-1)(x-3)(x-5), & x > 1 \end{cases}$$

Teoremas sobre derivadas

> **Em tempo**
> Observe que a palavra "corolário" significa proposição que imediatamente se deduz de outra demonstrada. Pode ser uma decorrência ou conseqüência.

Dois importantes teoremas devem ser discutidos. Eles são alicerces conceituais para a resposta de uma série de questões. Por exemplo: que funções velocidade podem ter uma dada função aceleração? Que funções posição podem ter uma dada função velocidade?

As repostas podem ser dadas se conhecemos os corolários do Teorema do Valor Médio.

Ao trabalhar com as representações gráficas é possível observar fortes evidências de que entre dois pontos quaisquer de cruzamento de uma curva com o eixo dos x há um ponto na curva em que a tangente é horizontal. A garantia dessa afirmação é obtida pelo Teorema de Rolle.

Os teoremas apresentados a seguir não serão demonstrados. Para você que tem curiosidade matemática específica para processos de demonstração, pesquise no livro Cálculo A, já indicado anteriormente, e disponível na biblioteca da Unisul.

Parece ironia!

O matemático francês Michel Rolle (1652-1719) foi um autoditada. Trabalhou como contador e estudou álgebra e as equações nas suas horas vagas. Em 1690 publicou *Traité d'algèbre*, que continha avanços na notação e nos métodos para resolução das raízes das equações. No ano seguinte, publicou *Démonstration d'une méthode pour resoudre les egalitez de tous les degrez*, que continha o teorema que leva seu nome. Quando Rolle publicou este teorema, seu objetivo era mostrar que entre cada dois zeros de uma função polinomial há sempre um zero da derivada polinomial. No entanto, ele não confiou nos novos métodos de Cálculo e gastou tempo e energia atacando o livro de cálculo de L'Hospital (vamos falar das regras de L´Hospital na seção seguinte). É uma ironia que hoje em dia Rolle seja lembrado por sua contribuição exatamente no Cálculo.

> ***Teorema de Rolle:*** *Seja* $y = f(x)$ *uma função definida e contínua em* $[a,b]$ *e derivável em* (a,b). *Se* $f(a) = f(b) = 0$, *então existe pelo menos um ponto* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Este teorema garante que uma curva derivável tem ao menos uma tangente horizontal entre dois pontos quaisquer onde a curva cruza o eixo dos *x*. Veja na Figura 4.16 a situação mostrando três pontos.

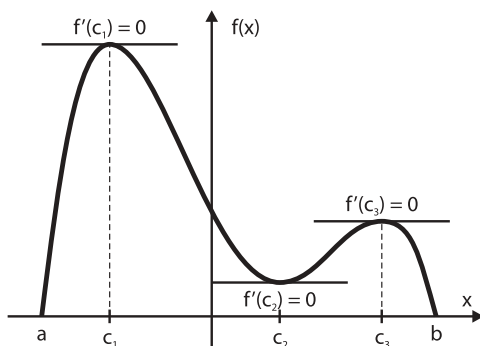



Figura 4.16 Visualização do Teorema de Rolle

> ***Teorema do Valor Médio:*** *Seja* $y = f(x)$ *uma função contínua em* $[a,b]$ *e derivável em* (a,b). *Então existe um número* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Geometricamente o Teorema do Valor Médio diz que, em algum lugar entre P e Q, a curva apresenta pelo menos uma tangente paralela à corda PQ (ver Figura 4.17).

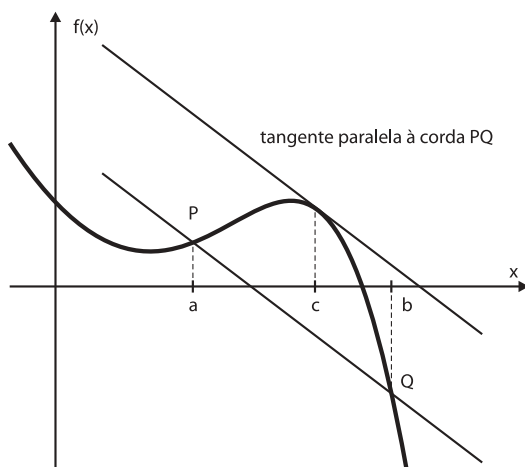



Figura 4.17 Visualização do Teorema do Valor Médio

Análise do crescimento e decrescimento de uma função

Podemos analisar o crescimento e decrescimento de uma função utilizando as derivadas como ferramenta. Observe nas Figuras 4.18 e 4.19 as retas tangentes às curvas traçadas.

Na Figura 4.18 temos uma função decrescente e as retas tangentes em 3 pontos da curva são decrescentes e, portanto, têm o coeficiente linear negativo. Na Figura 4.19 temos uma função crescente e as retas tangentes em 3 pontos da curva têm o coeficiente linear positivo.

Lembrando da interpretação geométrica da derivada (seção 1 da Unidade 3) podemos relacionar o crescimento e decrescimento da função num intervalo, com o sinal da derivada em pontos deste intervalo.

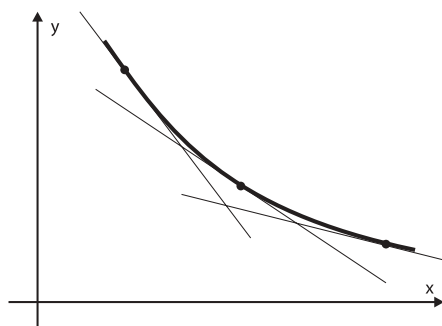
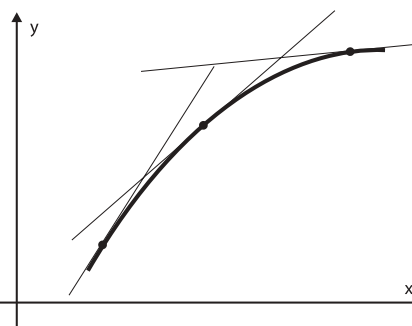



Figura 4.18 Função decrescente **Figura 4.19** Função crescente

Formalizando essas idéias enunciamos a proposição que segue.

> ***Proposição 2:*** *Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável no intervalo (a,b).*
>
> *(a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f é crescente em $[a,b]$;*
>
> *(b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f é decrescente em $[a,b]$.*

Olá pessoal da Matemática!

Vejam que demonstração legal.

Estamos diante de uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável em (a,b). Considerando dois números quaisquer x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$ ou $x_1 - x_2 > 0$, pertencentes a $[a,b]$, pelo Teorema do valor médio, segue que

$\exists\, c \in (x_1,x_2)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

No item (a) temos a hipótese de que se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, assim, $f'(c) > 0$ ou $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$. Portanto, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ e $y = f(x)$ é crescente em $[a,b]$.

No item (b) temos a hipótese de que se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, assim, $f'(c) < 0$ ou $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$. Portanto, $f(x_2) - f(x_1) < 0$ e $y = f(x)$ é decrescente em $[a,b]$.

Exemplos

Analisar o crescimento e o decrescimento das seguintes funções:

(a) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{5x^3}{3}+3x^2$

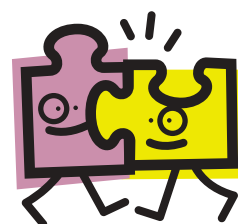
(b) $y = -x^2 + 4x - 6$

(c) $f(x)=\begin{cases} -(x-2)(x+2), & x \le 3 \\ \dfrac{5}{3}x-10, & x > 3 \end{cases}$

Vamos aplicar a Proposição 2 e apresentar a visualização gráfica.

Para aplicar a Proposição 2, é preciso fazer a derivada da função dada.

Vamos resolver o **item (a)** $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{5x^3}{3}+3x^2$. Temos a derivada

$$y' = x^3 - 5x^2 + 6x.$$

Vamos analisar os valores de x tais que a derivada seja positiva ou negativa.

$$x^3 - 5x^2 + 6x > 0 \quad \text{ou} \quad x^3 - 5x^2 + 6x < 0$$
$$x(x-3)(x-2) > 0 \qquad\quad x(x-3)(x-2) < 0$$

Lembrando a resolução de inequação discutida na seção 3 da Unidade 1, vamos ter os seguintes casos:

Caso 1: A derivada é positiva ou $x(x - 3)(x - 2) > 0$.

- $x > 0, (x - 3) > 0, (x - 2) > 0$
- $x < 0, (x - 3) < 0, (x - 2) > 0$
- $x < 0, (x - 3) > 0, (x - 2) < 0$
- $x > 0, (x - 3) < 0, (x - 2) < 0$

Reescrevendo temos

- $x > 0, x > 3, x > 2 \quad \Rightarrow \quad x > 3$
- $x < 0, x < 3, x > 2 \quad \Rightarrow$ não existe x
- $x < 0, x > 3, x < 2 \quad \Rightarrow$ não existe x
- $x > 0, x < 3, x < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 2$

Caso 2: A derivada é negativa ou $x(x - 3)(x - 2) < 0$.

- $x < 0, (x - 3) < 0, (x - 2) < 0$
- $x < 0, (x - 3) > 0, (x - 2) > 0$
- $x > 0, (x - 3) < 0, (x - 2) > 0$
- $x > 0, (x - 3) > 0, (x - 2) < 0$

Reescrevendo temos

- $x < 0, x < 3, x < 2 \quad \Rightarrow \quad x < 0$
- $x < 0, x > 3, x > 2 \quad \Rightarrow$ não existe x
- $x > 0, x < 3, x > 2 \quad \Rightarrow \quad 2 < x < 3$

- $x > 0, x > 3, x < 2 \quad \Rightarrow \quad$ não existe x

Diante dos resultados anteriores podemos concluir que a função $y = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2$ apresenta:

- crescimento em [0,2] e [3,+∞), pois em (0,2) e (3,+∞) a derivada é positiva;
- decrescimento em (–∞,0] e [2,3], em (–∞,0) e (2,3) a derivada é negativa.

A figura 4.20 apresenta a visualização desses resultados.

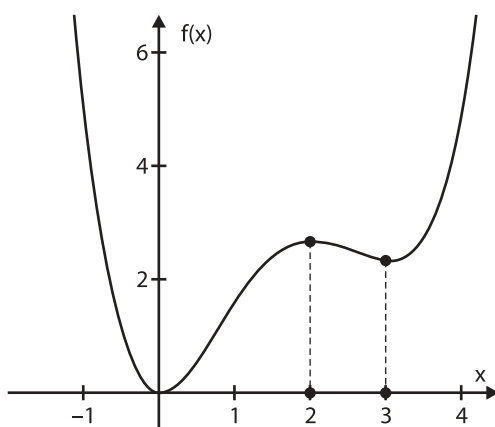



Figura 4.20 Gráfico da função $y = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2$

Vamos resolver o **item (b)** $y = -x^2 + 4x - 6$. Este exemplo é bem mais simples que o anterior, pois estamos diante de uma função do segundo grau, cujo gráfico é uma parábola. Temos a derivada

$$y' = -2x + 4.$$

Vamos analisar os valores de x tais que a derivada é positiva ou negativa.

$$-2x + 4 > 0 \quad \text{ou} \quad -2x + 4 < 0.$$

Concluímos assim que a função é:

- crescente em $(-\infty,2]$, pois em $(-\infty,2)$ a derivada é positiva;
- decrescente em $[2,+\infty)$, pois em $(2,+\infty)$ a derivada é negativa.

Observe o resultado na Figura 4.21.

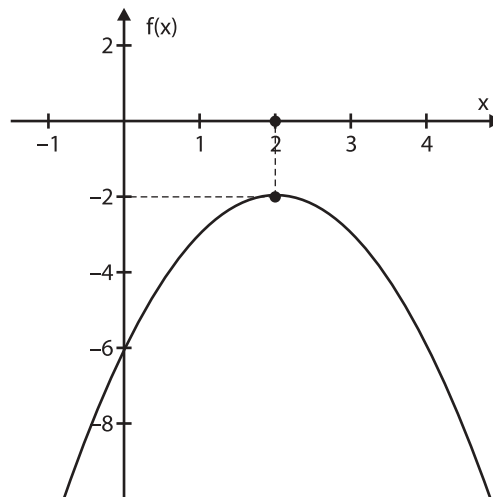



Figura 4.21 Gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 6$

Vamos resolver o **item (c)** que apresenta uma função definida por duas sentenças.

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)(x+2), & x \leq 3 \\ \dfrac{5}{3}x - 10, & x > 3 \end{cases}$$

A derivada desta função é

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 3 \\ \dfrac{5}{3}, & x > 3 \end{cases}$$

Analisando o sinal da derivada podemos observar que é:

- positiva para os intervalos (–∞,0] e [3,+∞), portanto, a função é crescente
- negativa para o intervalo [0,3], portanto, a função é decrescente.

Observe o resultado na Figura 4.22.

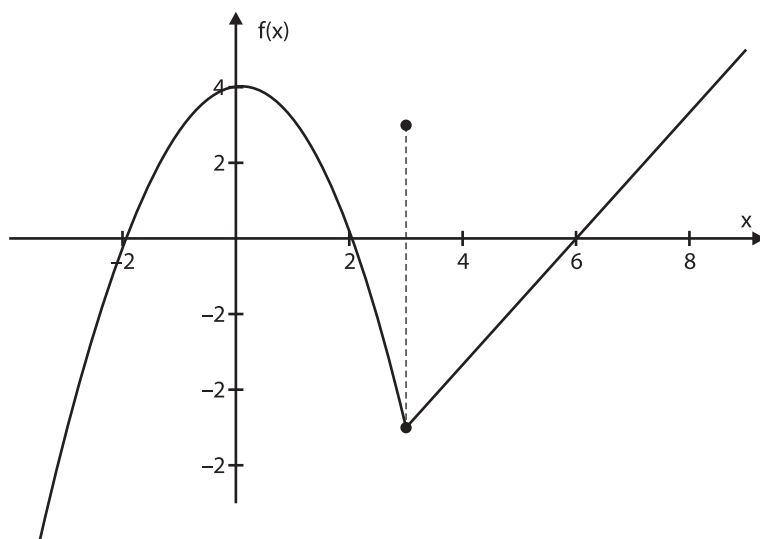
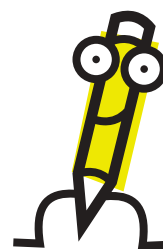
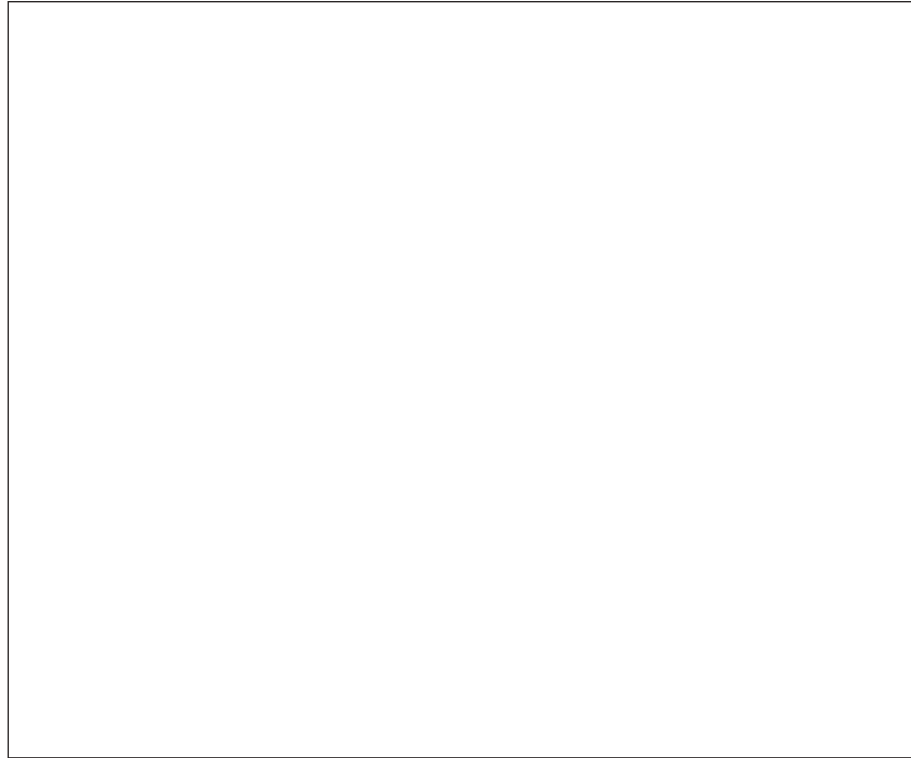
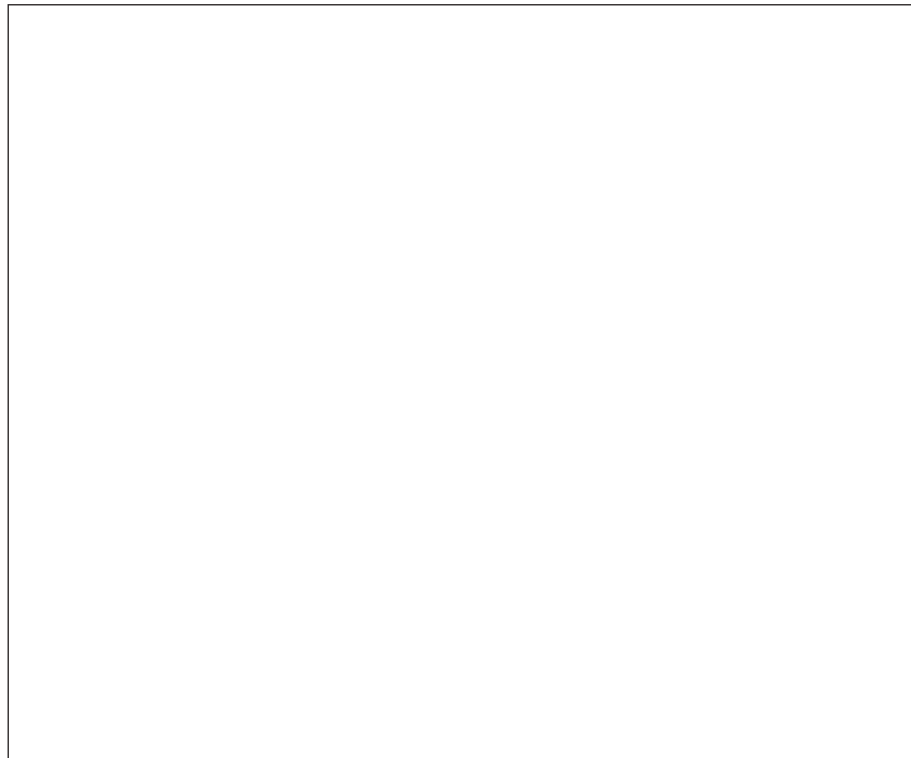



Figura 4.22 Gráfico da função $f(x)=\begin{cases} -(x-2)(x+2), & x \leq 3 \\ \frac{5}{3}x-10, & x > 3 \end{cases}$

Agora é a sua vez!

Analise o crescimento e o decrescimento das seguintes funções:

(a) $y=\frac{x^4}{4}-\frac{19x^2}{2}+30x+10$

(b) $y = x^2 - 8x + 15$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 9, & x < 5 \\ -2x + 34, & x \geq 5 \end{cases}$

Uso da derivada para determinar os máximos e mínimos de uma função

Para determinar os máximos e mínimos de uma função podemos utilizar dois critérios enunciados por dois teoremas cujas demonstrações são simples a partir das considerações já apresentadas nesta seção. A demonstração poderá ser obtida no livro Cálculo A, já citado.

> ***Teorema 1:*** *Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a,b]$ e possui derivada em todos os pontos do intervalo (a,b), exceto possivelmente num ponto $c \in (a,b)$.*
>
> *(a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então $y = f(x)$ tem um máximo relativo em c.*
>
> *(b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então $y = f(x)$ tem um mínimo relativo em c.*

Este teorema é conhecido como **critério da derivada primeira** e sua interpretação geométrica pode ser visualizada nas Figuras 4.23, 4.24 e 4.25 . Observe que podemos estar diante de um ponto crítico em que a derivada se anula ou não existe (ver definição 1 de 3.1).

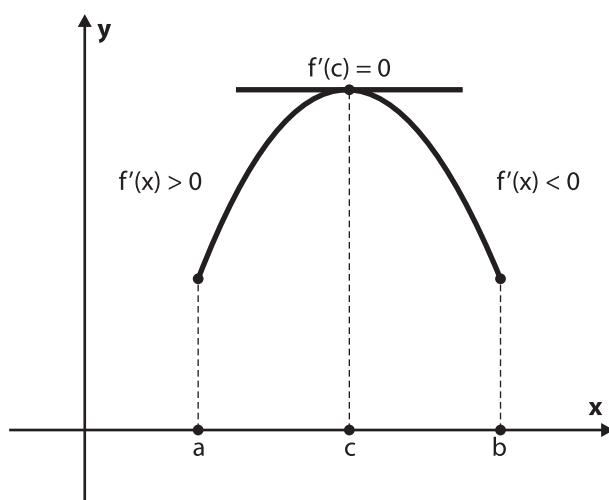



Figura 4.23 Ponto de máximo

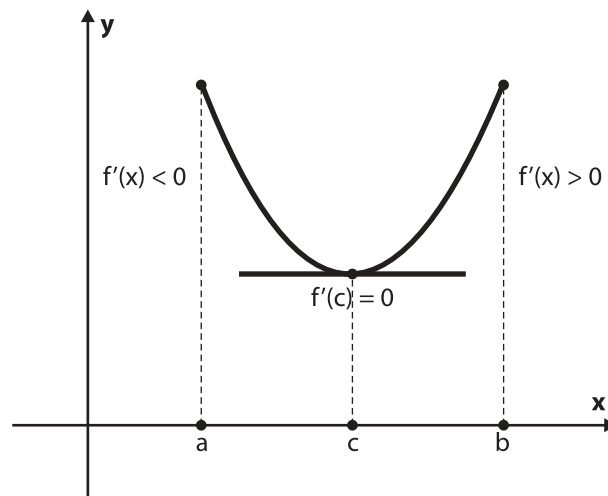



Figura 4.24 Ponto de mínimo

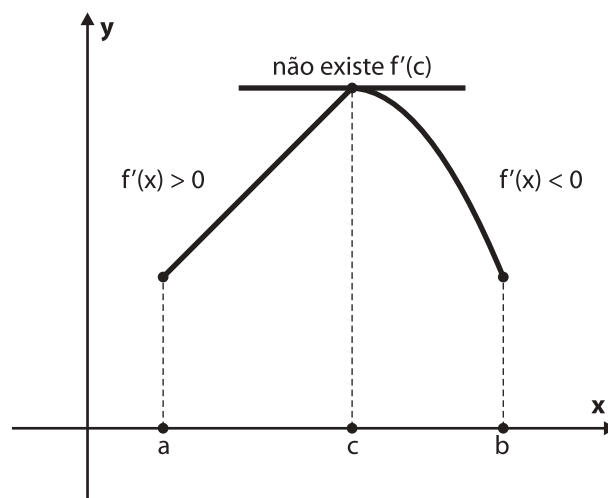
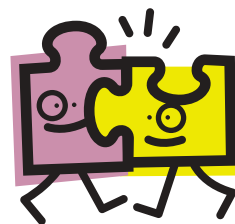



Figura 4.25 Ponto de máximo

> ***Teorema 2:*** *Seja $y = f(x)$ uma função derivável num intervalo (a,b), e $c \in (a,b)$ é um ponto crítico da função. Se $y = f(x)$ admite derivada de segunda ordem em (a,b), temos:*
>
> *(a) Se $f''(x) < 0$, $y = f(x)$ tem um valor máximo relativo em c.*
>
> *(b) Se $f''(x) > 0$, $y = f(x)$ tem um valor mínimo relativo em c.*

Este teorema é conhecido como **critério da derivada segunda** e é utilizado para analisar os pontos extremantes de uma função sempre que possível.

Exemplos

Analisar os pontos de máximos e mínimos da função $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

Vamos aplicar os critérios enunciados. O procedimento inicial requer sempre o cálculo da derivada da função e a identificação dos pontos críticos (pontos nos quais a derivada se anula). Caso a função tenha pontos em que a derivada não existe, estes devem ser identificados, pois são também pontos críticos.

Não esqueça das dicas da Teca, pois os recursos visuais facilitam muito a resolução de um exemplo.

Vamos, assim, escrever a derivada de primeira ordem da função dada.

$$f'(x) = 8x^3 - 8x.$$

Fazendo $8x^3 - 8x = 0$ vamos encontrar os pontos críticos dessa função.

$$\begin{aligned} 8x^3 - 8x &= 0 \\ x^3 - x &= 0 \\ x(x^2 - 1) &= 0 \\ x(x - 1)(x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Assim temos as raízes $x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$.

Para facilitar você pode montar um quadro norteador:

- estabeleça intervalos tendo como base as raízes encontradas;
- analise o sinal da derivada fazendo $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$ (se necessário retorne aos exemplos da seção 3.3);
- analise o crescimento e decrescimento.

Intervalos	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Sinal de f′(x)	negativa	positiva	negativa	positiva
Cresce ou decresce	decresce	cresce	decresce	cresce

Com este quadro já é possível aplicar o **critério da derivada primeira** (Teorema 1). Acompanhe no quadro:

- decresce – cresce $\Rightarrow x = -1$ é um ponto de mínimo relativo;
- cresce – decresce $\Rightarrow x = 0$ é um ponto de máximo relativo;
- decresce – cresce $\Rightarrow x = 1$ é um ponto de mínimo relativo.

Você pode optar pela aplicação do critério da derivada segunda (Teorema 2). Nesse caso é necessário encontrar a derivada de segunda ordem da função
$y = f(x)$.

$$f'(x) = 8x^3 - 8x$$

$$f''(x) = 24x^2 - 8$$

O quadro auxiliar fica:

Pontos críticos	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
Sinal de $f''(x)$ no ponto	$f''(-1) = 16$ positivo	$f''(0) = -8$ negativo	$f''(1) = 16$ positivo

Acompanhe no Teorema 2 a interpretação dos resultados:

- $x = -1$ é um ponto de mínimo relativo;
- $x = 0$ é um ponto de máximo relativo;
- $x = 1$ é um ponto de mínimo relativo.

Confira os resultados obtidos na Figura 4.26.

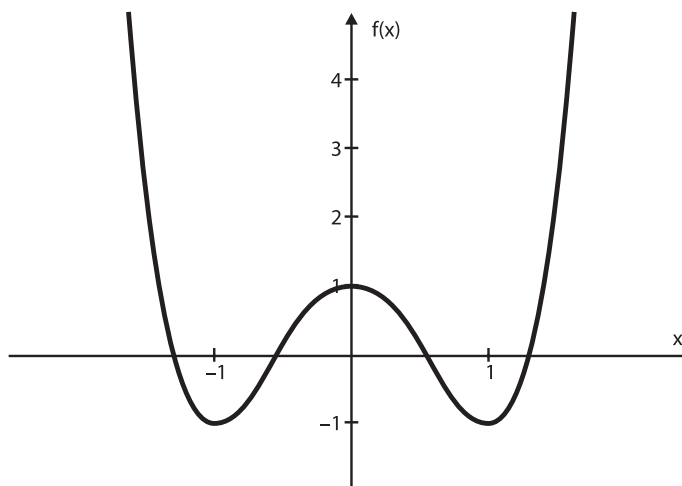
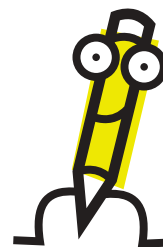



Figura 4.26 Gráfico da função $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$

Agora é a sua vez!

Analise os pontos de máximos e mínimos da função $f(x) = -x(x-2)(x+2)$.

Concavidade de uma função

Ao aplicar os teoremas da seção anterior é possível você ficar diante da situação em que a derivada segunda se anula nos pontos críticos.

Como vamos traduzir esse resultado?

Para interpretar esses resultados vamos introduzir novos conceitos e nova proposição no contexto da concavidade das funções.

Definição 2: *Uma função é dita* ***côncava para cima*** *no intervalo (a,b), se f'(x) é crescente neste intervalo.*

Definição 3: *Uma função é dita* ***côncava para baixo*** *no intervalo (a,b), se f'(x) é decrescente neste intervalo.*

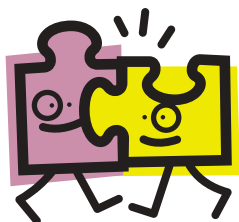
> ***Proposição 3:*** *Seja uma função $y = f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável até segunda ordem no intervalo (a,b):*
>
> *(a) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, então $y = f(x)$ é côncava para cima em (a,b).*
>
> *(b) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, então $y = f(x)$ é côncava para baixo em (a,b).*

Para esclarecer estes conceitos, basta você lembrar do gráfico de parábolas:

- viradas para baixo ⇨ côncava para baixo;
- viradas para cima ⇨ côncava para cima.

Vamos recuperar outra questão motivadora do início desta unidade.

O que é um ponto de inflexão?

> ***Definição 4:*** *Os pontos do gráfico em que a função muda a concavidade são ditos pontos de inflexão.*
>
> *Os pontos de inflexão podem ocorrer em pontos em que a derivada segunda se anula ou em pontos em que a derivada não existe.*

Exemplos

Analisar a concavidade da função $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2$ apresentada na Figura 4.27.

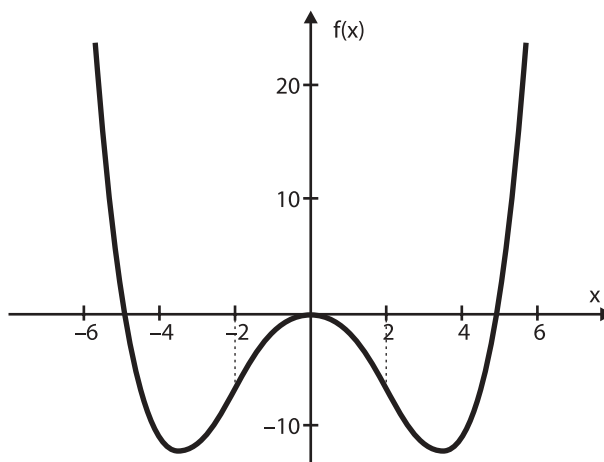



Figura 4.27 Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2$

Vamos precisar das derivadas até segunda ordem

$$f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^2$$
$$f'(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$$
$$f''(x)=x^2-4$$

Analisando o sinal da derivada segunda temos

Para

$$x^2-4>0$$
$$(x-2)(x+2)>0$$

temos os intervalos $(-\infty,-2)$ e $(2,+\infty)$.

Para

$$x^2-4<0$$
$$(x-2)(x+2)<0$$

temos o intervalo $(-2, 2)$.

Podemos estabelecer um quadro auxiliar

Intervalos	$x<-2$	$-2<x<2$	$x>2$
Sinal de $f''(x)$	positiva	negativa	positiva

Acompanhe na Proposição 3 a interpretação dos resultados assinalados no quadro e identifique da Figura 4.27 os resultados:

- no intervalo $(-\infty,-2)$ e $(2,+\infty)$ a função é côncava para cima;
- no intervalo $(-2,2)$ a função é côncava para baixo.

Conforme a definição 3, podemos dizer que $x=-2$ e $x=2$ são pontos de inflexão.

Observe que a simples inspeção gráfica não possibilita a identificação exata desses pontos de inflexão. Daí a importância de trabalhar o contexto algébrico. É uma parceria perfeita para analisar o comportamento das funções: representações gráficas e representações algébricas.

Agora é a sua vez!

1) Analise a concavidade e pontos de inflexão da função $y=\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-6x^2$.

2) Dada a função $f(x) = 4x^3 + 21x^2 + 36x - 70$ verifique a existência de pontos extremantes e pontos de inflexão. Analise a concavidade da curva e intervalos de crescimento e decrescimento.

Análise global do comportamento de uma função

Quando você quiser discutir propriedades e características de qualquer tipo de função, a ferramenta matemática para auxiliar é a derivada.

Veja nos exemplos que seguem algumas aplicações envolvendo diferentes tipos de funções. Procure observar que vamos utilizar todas as ferramentas discutidas nesta seção.

Exemplos

1) Analisar o comportamento da função $f(x)=\sqrt{x}(12-x)$.

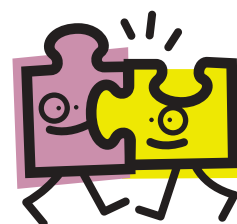
Vamos, inicialmente, observar que esta função só está definida para valores de x maiores ou iguais a zero. As derivadas de primeira e segunda ordem são calculadas para que possamos aplicar as proposições dadas. Lembre-se que estamos usando as regras de derivação discutidas na Unidade 3.

$$f(x)=\sqrt{x}(12-x)$$
$$f'(x)=\frac{3(4-x)}{2\sqrt{x}}$$
$$f''(x)=\frac{-3(x+4)}{4x^{3/2}}.$$

Os pontos críticos da função são encontrados quando a derivada de primeira ordem se anula e em pontos em que a derivada não existe.

Resolvendo

$$\frac{3(4-x)}{2\sqrt{x}}=0$$
$$4-x=0$$
$$x=4$$

obtemos que $x = 4$ é um ponto crítico que pode ser analisado.

As derivadas de primeira e segunda ordem não estão definidas no ponto $x = 0$.

Vamos fazer o quadro auxiliar

Intervalos	**$0 < x < 4$**	**$x > 4$**
Sinal de f′(x)	positiva	negativa
Cresce ou decresce	cresce	decresce
Sinal de f″(x)	negativa	negativa

Portanto, a função dada é crescente no intervalo [0,4] e decrescente em [4,+∞]. Aplicando o critério da derivada primeira podemos afirmar que o ponto $x = 4$ é um ponto de máximo relativo.

A função é sempre côncava para baixo, pois a derivada de segunda ordem é sempre negativa. Assim, não temos ponto de inflexão.

Na Figura 4.28 temos a visualização gráfica.

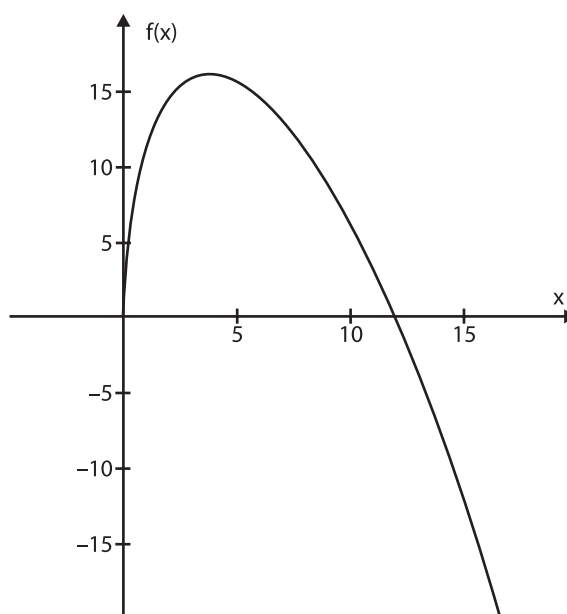



Figura 4.28 Gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}(12 - x)$

2) Analisar o comportamento da função racional $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Vamos calcular as derivadas de primeira e segunda ordem. Veja que os resultados que seguem são obtidos a partir do uso das regras de derivação.

Acompanhe com a sua Tabela de Derivadas!

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$
$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}.$$

Vamos pesquisar a existência de pontos críticos

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0$$
$$1-x^2 = 0$$
$$(1-x)(1+x) = 0$$

Assim, temos que a derivada de primeira ordem se anula em $x = 1$ e $x = -1$.

Vamos pesquisar os pontos em que a derivada segunda se anula

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0$$
$$x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$$

Assim, temos que a derivada de segunda ordem se anula em $x = 0$, $x = \sqrt{3}$
e
$x = -\sqrt{3}$.

Vamos agora fazer o quadro auxiliar:

Intervalos	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Sinal de f′(x)	negativa	positiva	positiva	negativa
Cresce ou decresce	decresce	cresce	cresce	decresce

Intervalos	$x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
Sinal de f″(x)	negativa	positiva	negativa	positiva
Concavidade	côncava para baixo	côncava para cima	côncava para baixo	côncava para cima

Nos quadros já temos o estabelecimento dos intervalos de crescimento e decrescimento e a análise da concavidade. Verificamos que os pontos 0, $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ são pontos de inflexão.

Por outro lado pelo critério da derivada primeira podemos afirma que:

- $x = 1$ é um ponto de máximo relativo da função;
- $x = -1$ é um ponto de mínimo relativo da função.

Observe esses resultados na Figura 4.29

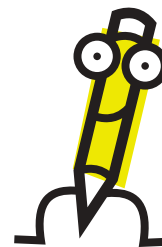
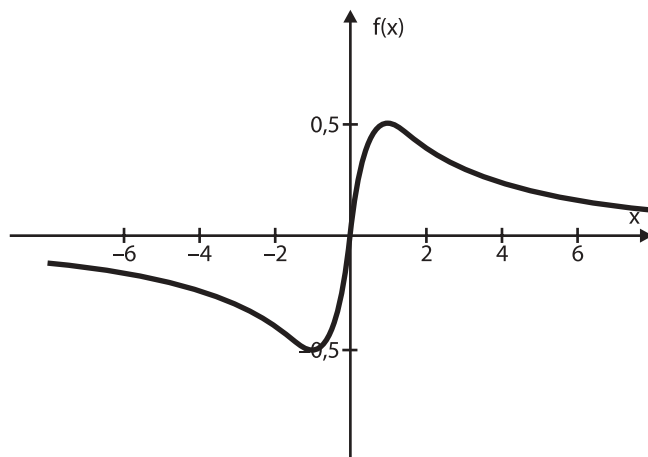



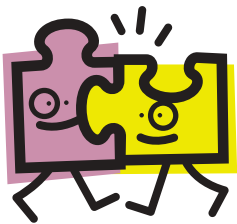
Figura 4.29 Gráfico de $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

Agora é a sua vez!

Analise o comportamento das seguintes funções

(a) $f(x) = x^2 - 9$

(b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+9}$

(c) $f(x)=x\sqrt{x}$

Otimização

Uma das aplicações mais importantes do estudo desta seção está na resolução de problemas cuja solução requer o maior valor possível ou o menor valor possível. Significa que dentre os máximos e mínimos relativos vamos ter que definir qual o maior valor da

função e qual o menor valor da função. São os **máximos e mínimos absolutos**.

Veja algumas situações interessantes!

Exemplos

1) Vamos considerar que numa empresa a receita de x milhares de unidades é dada pela função $R(x) = 9x$ e o custo de produção é $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$. Qual o nível de produção que maximiza o lucro?

Nesses tipos de problemas é essencial ter bem claro qual é a função que vamos trabalhar. Temos, neste exemplo, que

Lucro = Receita – Custo de produção

ou

$$L(x) = 9x - (x^3 - 6x^2 + 15x)$$
$$= -x^3 + 6x^2 - 6x.$$

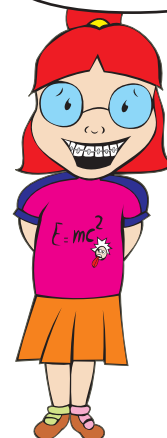
Vamos calcular a derivada da função lucro

$$L(x) = -x^3 + 6x^2 - 6x$$
$$L'(x) = -3x^2 + 12x - 6.$$

Para achar os pontos críticos vamos fazer

$$L'(x) = -3x^2 + 12x - 6 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau vamos obter valores aproximados de $x = 3{,}4142$ e $x = 0{,}5857$ que são os pontos extremos da função.

Qual o valor que vai ser a resposta do nosso problema?
Basta aplicar o critério da derivada segunda para saber qual o máximo.

$$L'(x) = -3x^2 + 12x - 6 = 0$$

$$L''(x) = -6x + 12$$

$$L''(3{,}4142) \approx -8{,}485$$

$$L''(0{,}5857) \approx 8{,}485$$

Portanto, o ponto de máximo é $x = 3{,}4142$ milhares de unidades.

2) Qual o menor perímetro possível para um retângulo de área igual a 25 metros quadrados? Quais são as suas dimensões?

Precisamos modelar a função, para tal observe a Figura 4.30 de um retângulo de dimensões *a* e *b*.

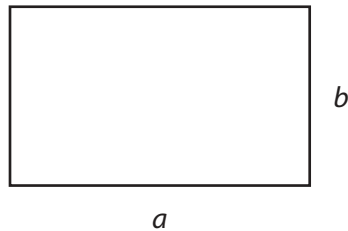



Figura 4.30 Retângulo de lados *a* e *b*.

Da geometria sabemos que o perímetro é dado por

$$P = 2a + 2b.$$

Esta é a função que queremos minimizar. Como estamos com duas variáveis independentes é necessário fazer acertos. Temos a informação de que a área deve ser igual a $25m^2$. Assim

$$A = ab = 25.$$

Logo $b = \frac{25}{a}$ e o perímetro pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} P &= 2a + 2b \\ &= 2a + 2\times\frac{25}{a} \\ &= 2a + \frac{50}{a}. \end{aligned}$$

hora	número de telespectadores
16	30
18	15
20	14
22	17
24	10

Para otimizar vamos achar a derivada

$$\begin{aligned} P &= 2a + \frac{50}{a} \\ P' &= 2 - \frac{50}{a^2}. \end{aligned}$$

Igualando a derivada a zero vamos achar o ponto crítico

$$\begin{aligned} P' = 2 - \frac{50}{a^2} &= 0 \\ \frac{2a^2 - 50}{a^2} &= 0 \\ 2a^2 - 50 &= 0 \\ a &= \pm 5. \end{aligned}$$

Como o problema não admite como respostas valores negativos, vamos simplesmente verificar o valor $a = 5$.

Para verificar que este ponto é de mínimo vamos aplicar o critério da derivada segunda.

$$\begin{aligned} P' &= 2 - \frac{50}{a^2} \\ P'' &= \frac{100}{a^3} \\ P''(5) &= \frac{100}{125}. \end{aligned}$$

Como o resultado é positivo estamos diante de um ponto de mínimo. Assim as dimensões do retângulo são $a = 5$ e $b = 5$.

Veja que interessante este resultado: o retângulo de menor perímetro com uma determinada área é o próprio quadrado.

3) Uma pesquisa de audiência de um canal de TV foi realizada para saber o número de telespectadores no período entre 4 horas da tarde e meia noite em um pequeno bairro de uma cidade. A tabela que segue apresenta o resultado. Qual a hora de maior audiência no período considerado?

Usando os recursos do *software* Graph –que já discutimos anteriormente– podemos encontrar a função que modela este problema e a partir daí achar o valor máximo.

A Figura 4.31 mostra a apresentação do Graph.

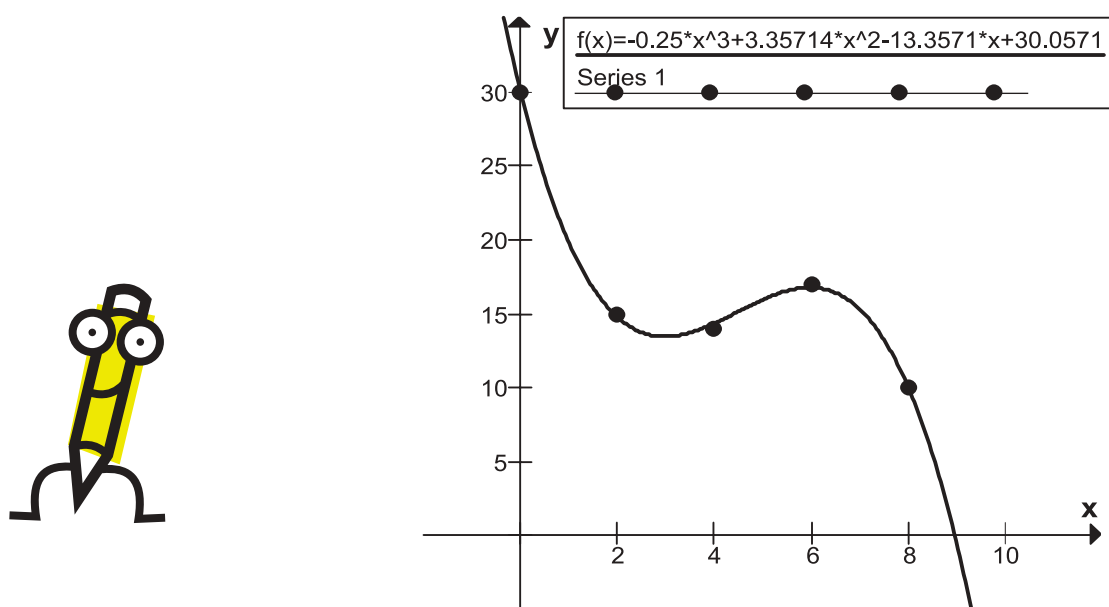



Figura 4.31 Ajuste de curva

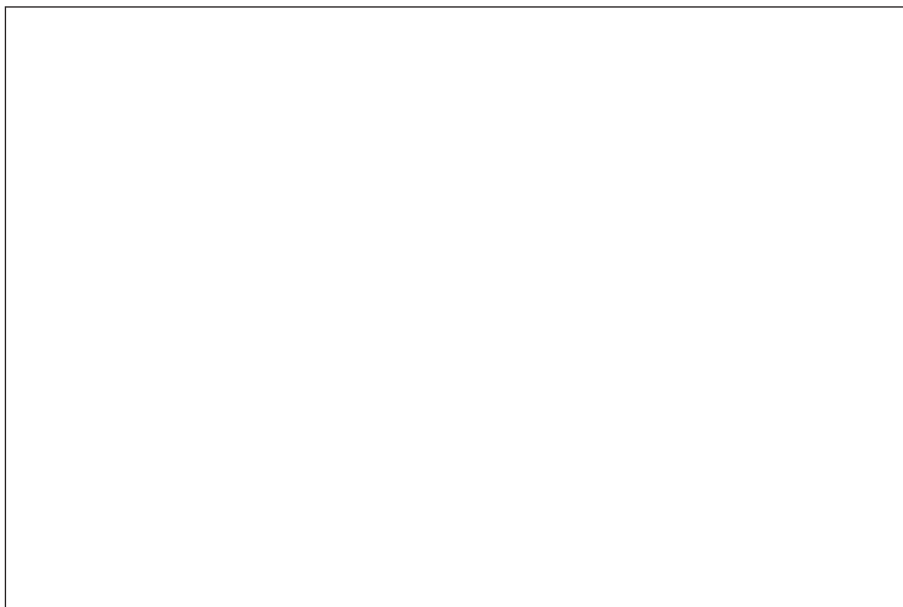
A função modelada é $f(x) = -0{,}25x^3 + 3{,}36x^2 - 13{,}36x + 30{,}05$. Como no problema temos que os valores que são significativos são números naturais, observamos a curva e podemos apresentar as seguintes conclusões aproximadas:

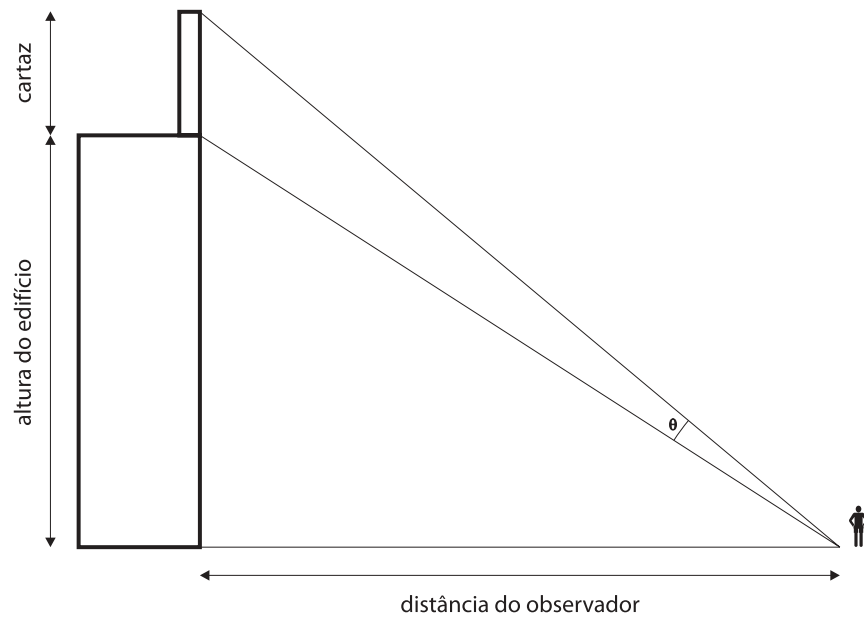
- entre 16 horas e 19 horas temos um declínio na audiência (curva decresce);
- entre 19 horas e 22 horas temos um aumento na audiência (curva crescente);
- entre 22 e 24 horas temos novamente um declínio na audiência (curva decresce).

Para responder a pergunta específica do enunciado, temos que o maior número de audiência foi registrado às 16 horas. O valor de máximo absoluto da função no intervalo considerado é 30 telespectadores.

Observe que a Figura 4.31 mostra os picos de audiência no período considerado. Esses picos são máximos e mínimos relativos. A resposta do problema é um máximo absoluto que está no extremo do intervalo considerado. Esse tipo de situação é bastante usual em problemas práticos. Portanto, não esqueça! Sempre que você resolver um problema de otimização preste atenção no intervalo no qual os dados são válidos, pois a resposta é única e pode estar localizada nos extremos do intervalo.

Agora é a sua vez!

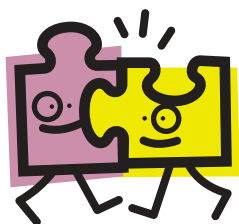
1) Encontre dois números positivos cuja soma seja 35 e cujo produto seja o maior possível.

2) Um cartaz de 6 metros de altura está localizado no alto de um prédio com sua parte inferior a 20 metros acima do nível do olho do observador que está na frente do prédio. A que distância diretamente abaixo do cartaz deve colocar-se um observador de modo a maximizar o ângulo de visão?

A altura do prédio é 20 metros e a altura do cartaz é 6 metros. Qual a melhor posição?

Quem foi L´Hospital?

Veja que interessante esta história de plágio!

L´Hospital (1661-1704) era um nobre francês que escreveu um texto de cálculo no qual era apresentada pela primeira vez a regra para calcular de forma rápida limites indeterminados. Em 1691, Johann Bernoulli concordou em aceitar um salário de 300 libras por ano de seu antigo aluno L'Hospital para solucionar os problemas de cálculo e manter o ex-aluno atualizado sobre o assunto. Um desses problemas intitulava-se "problema $\frac{0}{0}$", solucionado por Bernoulli. Quando L´Hospital publicou seu livro de cálculo em 1696, a regra de "$\frac{0}{0}$" era apresentada como um teorema. Ele reconheceu sua dívida para com Bernoulli e, para não se intitular único autor, não colocou seu nome no livro. Entretanto, Bernoulli acusou L´Hospital de plágio por publicar no livro os resultados que ele obtivera

Em tempo

Preste bastante atenção para não fazer confusão daqui para frente com a derivada de um quociente. Ao usar a proposição você não está usando a regra do quociente entre f(x) e g(x). Por outro lado, quando em outras situações (não no contexto do cálculo de limites) em que a regra do quociente for requerida não utilize, de forma errada, o quociente das derivadas.

3) Uma página de livro deve ter uma área de 580 cm^2, com margens de 2,5 cm em cima, 2,5 cm nas laterais e 1,25 cm em baixo. Determine as dimensões da página com maior área impressa.

SEÇÃO 4

Regras de L`Hospital

Nesta seção vamos introduzir regras que utilizam derivadas no cálculo de limites com indeterminações. São regras bastante eficientes que podem ser aplicadas sempre que as funções são deriváveis num intervalo aberto I, com exceção de um ponto *a* para o qual a variável *x* vai tender.

> ***Proposição 4:*** *Sejam f(x) e g(x) funções deriváveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente, em um ponto a ∈ I com g'(x) ≠ 0 para todo x ≠ a em I.*
>
> *(a)* *Se* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ *e* $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,
> *então* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$;
>
> *(b)* *Se* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$ *e* $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$,
> *então* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Não vamos demonstrar aqui esta proposição que depende de uma fórmula denominada Fórmula de Cauchy. Se você está interessado na demonstração recomendamos o livro Cálculo A.

Observe que o cálculo de limites indeterminados fica facilitado desde que possamos derivar as funções.

A proposição dada também é válida quando estamos discutindo os limites laterais ou limites no infinito.

Exemplos

1) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{2e^{3x} - 2}{5x}$.

Aplicando a proposição 4 temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{3x}-2}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2e^{3x}-2)'}{(5x)'}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6e^{3x}}{5}$$
$$=\frac{6}{5}.$$

2) Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-7x^2+14x-8}{x^2-3x+2}$.

Aplicando a regra de L´Hospital da proposição 4 temos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-7x^2+14x-8}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-7x^2+14x-8)'}{(x^2-3x+2)'}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-14x+14}{2x-3}$$
$$=\frac{3}{-1}=-3.$$

3) Calcular $\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{3x}-2}{x}$

Agora estamos diante da indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{3x}-2}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(e^{3x}-2)'}{(x)'}$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{3e^{3x}}{1}$$
$$=+\infty.$$

4) Calcular $\lim_{x\to \infty}\frac{x^3-7x^2+14x-8}{x^2-3x+2}$

Agora estamos com um limite no infinito com indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Vamos aplicar a proposição 4. Observe que neste caso a proposição vai ser aplicada mais de uma vez.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-7x^2+14x-8}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3-7x^2+14x-8)'}{(x^3-3x+2)'}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-14x+14}{3x^2-3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-14x+14)'}{(3x^2-3)'}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-14}{6x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-14)'}{(6x)'}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{6}=1.$$

5) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$

Este é um dos limites fundamentais apresentados na Unidade 2. Vamos mostrar o resultado aplicando a regra de L`Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)'}{(x)'}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{1}$$
$$=\ln 2.$$

6) Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

Vamos voltar o nosso olhar para a representação gráfica?

Na Unidade 2 já apresentei a função f(x) = sen (1/x), usando os recursos computacionais. Foi possível observar que não existe limite lateral à direita nem à esquerda do zero. Veja, na Figura 4.32 o que acontece com esta função ao multiplicá-la por x. É visível que o limite quando x tende para zero é zero e quando x tende para o infinito o resultado é 1.

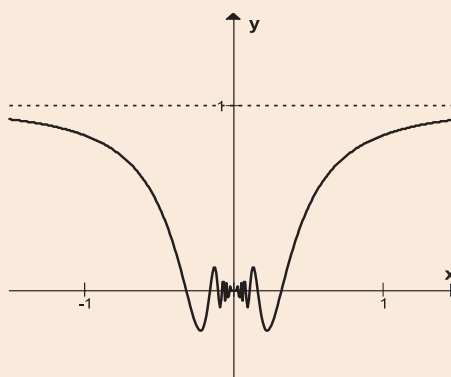



Figura 4.32 Gráfico de $f(x)=x\operatorname{sen} x\left(\frac{1}{x}\right)$

Neste exemplo, estamos diante de uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Para aplicar a proposição 4 precisamos inicialmente fazer algebrismo para que tenhamos a indeterminação $\frac{0}{0}$.

Veja que $\frac{1}{6x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x - 6x}{6x \operatorname{sen} x}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{6x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) &= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - 6x}{6x \operatorname{sen} x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(\operatorname{sen} x - 6x)'}{(6x \operatorname{sen} x)'} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 6}{6x \cos x + 6 \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{1-6}{0} = \infty.
\end{aligned}$$

7) Calcular $\lim_{x \to \infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Neste exemplo temos a indeterminação do tipo $\infty \times 0$. Para aplicar a regra de L´Hospital vamos fazer algebrismos para transformar em uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Observe que:

- $x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ ⇨ vamos transformar em $\frac{0}{0}$;
- $x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{x}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}}$ ⇨ vamos transformar em $\frac{\infty}{\infty}$.

Devemos escolher a maneira que reduza cálculos.
No caso é a opção de transformar em $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to\infty} x\,\text{sen}\,x\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

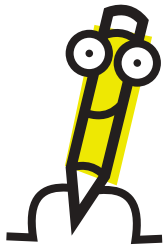
$$=1.$$

8) Calcular os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(b) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

Esses exemplos apresentam um tipo de indeterminação (1^∞,0^0) que necessitam de algebrismos específicos (uso de logaritmos) para aplicar a regra de L`Hospital.

No caso do **item (a)** vamos fazer

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\ln L = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Veja que agora estamos diante da indeterminação $\frac{0}{0}$.
Assim, podemos aplicar a proposição 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1/x^2}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\frac{1}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1.$$

Este resultado é o logaritmo do limite que queremos calcular. Assim,

$$\ln L = \ln \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1$$

ou

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Observe que este limite é o limite fundamental discutido na Unidade 2.

No **item (b)** temos o mesmo procedimento.

$$L = \lim_{x\to 0^+} x^x$$

$$\ln L = \ln \lim_{x\to 0^+} x^x$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \ln x^x$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x \ln x$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0.$$

Assim, $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1.$

Agora é a sua vez!

Calcular os seguintes limites utilizando as regras de L`Hospital

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x - 2}{5x}$

(b) $\lim_{x\to 4}\frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{x^2 - 5x + 4}$

Síntese

Nesta unidade você teve a oportunidade de aplicar os objetos matemáticos discutidos nas unidades anteriores. Você deve ter percebido que a variedade de aplicações das derivadas permite dizer que esta é efetivamente uma maravilhosa ferramenta do Cálculo. No contexto da continuidade das disciplinas de Cálculo, as derivadas aparecem como ferramenta básica para a inserção de novas ferramentas como, por exemplo, as integrais. Assim, é de fundamental importância que você não esteja com dúvidas para garantir um bom desempenho nas disciplinas seguintes.

Boa sorte para você no Cálculo II!

Atividades de auto-avaliação

1) Nos exercícios (a), (b) e (c) considere $s = f(t)$ uma função que relaciona o deslocamento de um corpo, s (metros), com o tempo, t (segundos). Determine a velocidade média para o intervalo de tempo dado. Determine a velocidade e a aceleração do corpo no instante $t = 2$ s. O corpo muda de direção durante o intervalo? Em caso afirmativo, quando?

(a) $s = 5t - t^2$ para $0 \leq t \leq 5$;

(b) $s = (t - 2)^2$ para $1 \leq t \leq 6$;

(c) $s = 3t^2 - 10t + 8$ para $1 \leq t \leq 4$.

2) Uma caixa d'água tem o formato cônico com o vértice para baixo. O raio da base mede 40 metros e a altura 5 metros. A água escoa a uma taxa de 52 m^3/min.

(a) Com que taxa o nível da água estará diminuindo quando este for de 3 metros de profundidade?

(b) Com que taxa o raio estará variando nesse momento?

3) Uma barra não homogênea de 15 metros de comprimento foi analisada e observou-se que a massa da barra, medida a partir da extremidade esquerda até um ponto x, é $m(x) = 2(x+1)\sqrt{x}$, sendo que x é medido em metros e a massa em quilogramas. Qual a densidade média do pedaço da barra, com 2,5 metros, localizado no extremo direito?

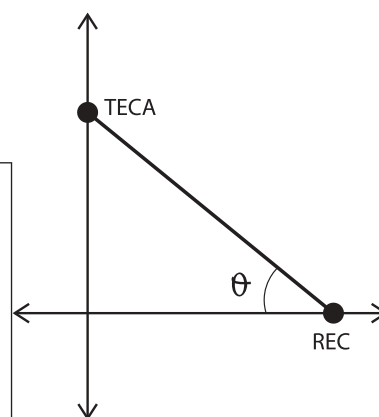
4)Uma indústria pode produzir x itens a um custo de $C(x)$ mil dólares. O rendimento de venda será de $R(x)$ mil dólares e o lucro de $L(x) = R(x) - C(x)$ mil dólares. Supondo que:

$R(x) = 9x$, $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ e $\frac{dx}{dt} = 0{,}1$ quando $x = 2$.

(a) Qual a taxa de variação do custo em relação ao tempo?

(b) Qual a taxa de variação do rendimento de venda em relação ao tempo?

(c) Qual a taxa de variação do lucro em relação ao tempo?

5) Teca e Rec estão caminhando em ruas retilíneas que formam um ângulo reto no cruzamento. Rec aproxima-se do cruzamento a 2 m/s enquanto Teca se afasta a 1 m/s. A que taxa o ângulo θ varia quando Rec está a 10 m do cruzamento e Teca a 20 m?

6) Um homem pretende cercar um lote retangular situado às margens de um rio. Não vai ser necessário colocar cerca ao longo da margem do rio. Se ele tiver 400 metros de cerca e se ele quiser que a área seja máxima, determine as dimensões do lote desejado.

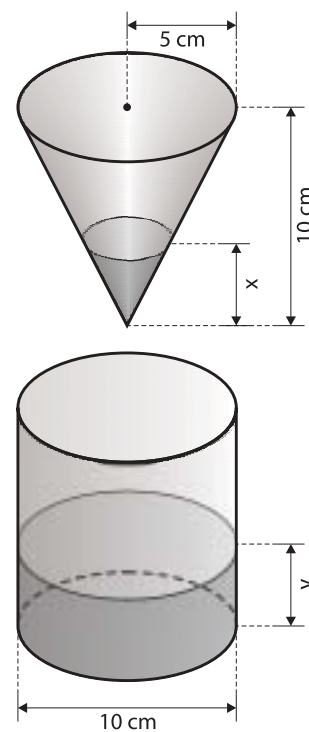
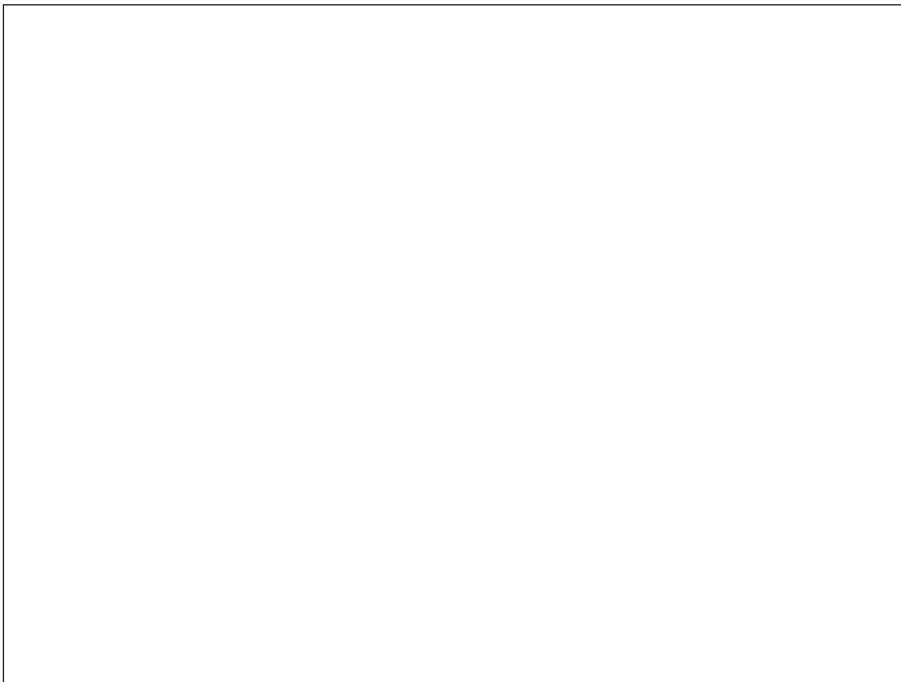
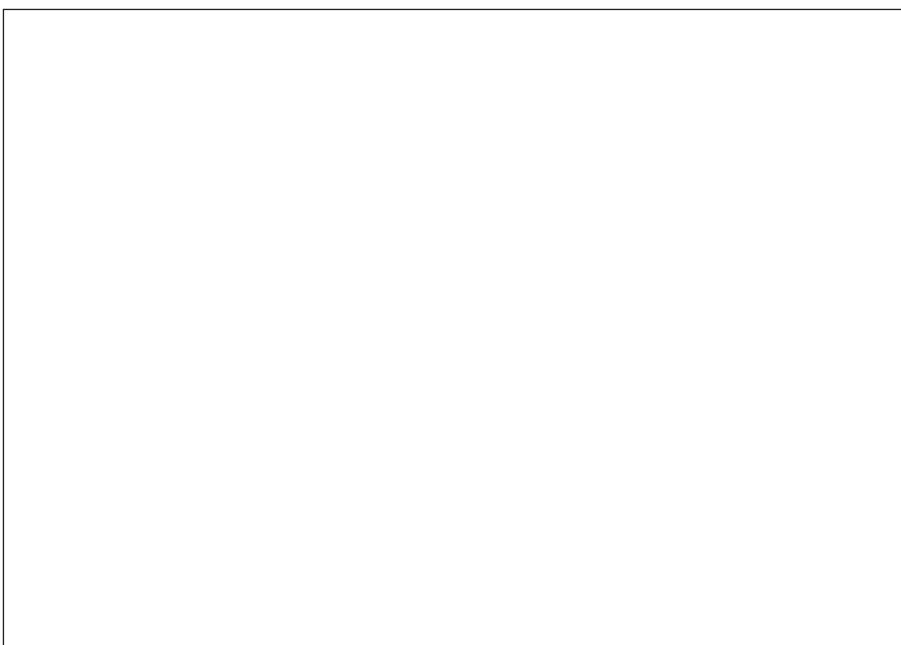
7) O movimento de uma mola sujeita a uma força de atrito ou uma força de amortecimento (por exemplo, lembrar do amortecedor em um carro) é freqüentemente modelada pela função $s(t) = 2e^{1,5t}\text{sen } 2\pi t$ sendo s a medida em centímetros e t segundos. Encontre a velocidade após t segundos e faça os gráficos das funções. Use recursos computacionais para fazer os gráficos no intervalo $0 \leq t \leq 2$.

8) Se uma bola de neve derrete de tal forma que sua área de superfície decresce a uma taxa de 1 cm^2/min, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro é 10 cm.

9) A altura de um triângulo cresce a uma taxa de 2 cm/s, enquanto a área do triângulo cresce a uma taxa de 4 cm^2/s. A que taxa está variando a base do triângulo quando a altura é 20 cm e a área é 400 cm^2?

10) Um barco é puxado para o ancoradouro por uma corda que está atada na proa do barco e que passa por uma polia sobre o ancoradouro que está 1 m mais alto do que a proa do barco. Se a corda for puxada a uma taxa de 1 m/s, quão rápido está se aproximando o barco do ancoradouro quando ele estiver a 10 m dele?

11) Uma escada de 5 m de comprimento está apoiada em uma parede. Se a base da escada começa a deslizar horizontalmente à taxa de 0,3 m/s, qual a taxa de variação do ângulo entre a escada e o solo quando o topo da escada está a 2 m do solo?

12) O café pinga de um filtro cônico de papel em uma cafeteira, conforme mostra a figura ao lado. Com taxa de 1cm3/min. sejam x a altura da água no filtro e y a altura da água na taça. Determine a relação $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dx}{dt}$ quando se coloca 15 cm³ de água no filtro.

13) Um cone circular reto tem altura $h = 6$ cm e o raio r da base está aumentando. Ache a taxa de variação da área de sua superfície lateral S em relação a r quando $r = 6$ cm.

14) Um balão de ar quente esférico é enchido à taxa de 3 m^3/s. Determine a taxa à qual o raio aumenta quando este é 10 metros.

15) Determine os pontos de máximos e mínimos das seguintes funções:

(a) $y = 3x^2 - 2x^3$

(b) $y = x^4 - 2x^2$

(c) $y = \frac{x^4}{4} - 3x^3 + \frac{15x^2}{2} + 25x - \frac{375}{4}$

(d) $y = \begin{cases} t^2 - 16, & t \leq 5 \\ -t + 14, & t > 5 \end{cases}$

16) Analise o comportamento das seguintes funções. Lembre que você deve analisar crescimento e decrescimento, máximos e mínimos relativos e concavidade.

(a) $f(x) = x^4 - 18x^2 + 40$ (b) $y = \dfrac{x}{x-1}$

(c) $f(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$ (d) $y = (x+3)^2(x-2)^3$

17) Encontre os valores máximos e mínimos absolutos das funções dadas nos intervalos apresentados. Apresente os gráficos.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ em [–1,4] (b) $f(x) = x^3 - 3x + 5$ em [0,2].

(c) $y = x - \cos x$ em $[0,2\pi]$

(d) $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$ em $[-1,2]$

(e) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+16}$

(f) $y = x + \sqrt{x}$

18) Discuta o crescimento e decrescimento das seguintes funções

(a) $y = \dfrac{1}{x+3}$

(b) $y = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{3}x^2$

(c) $y = x^2(x - 3)$

(d) $y = x \ln x$

(e) $y = x + \text{sen } x$

(f) $y = \frac{e^x}{x}$

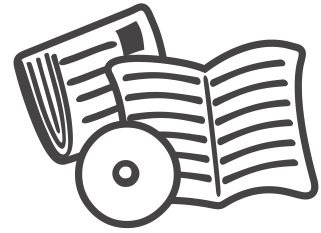
(g) $y = \text{senh } x$

(h) $f(x) = x^2 - 2x + 7$

Saiba mais

Para aprofundar os seus estudos, recomendamos a leitura do livro Cálculo A de autoria da Profa. Diva Marília Flemming e Mirian Buss Gonçalves, editado pela Makron Books em 1992. Em especial as aplicações das derivadas que estão no Capítulo 5. Outros livros de Cálculo podem também ser utilizados, por exemplo, o livro Cálculo de George B. Thomas que você pode visitar no site http://www.aw.com/thomas_br. Neste site você vai ter a oportunidade de saber mais sobre a História do Cálculo e também desenvolver exercícios on-line.

Observamos também que no ambiente virtual de aprendizagem da UnisulVirtual você terá informações direcionadas diretamente para você. Não deixe de acompanhar as atividades *on-line*!

Referências

ANTON, Howard. **Cálculo**: um novo horizonte. Vol. 1. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

BOULOS, Paulo. **Cálculo Diferencial e Integral**. Vol. 1. São Paulo: Makron Books, 1999.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**: funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Makron Books, 1992.

GARDNER, M, **Ah, Apanhei-te**: paradoxos de pensar e chorar por mais... Lisboa:Gradiva, 1993.

GUEDJ, Denis; **O Teorema do Papagaio**. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

HOFFMANN, Laurence D. **Cálculo**: um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 1983.

MACÉ, F. **A Sabedoria Pitagórica**. Curitiba: Biblioteca Neo-Pitagórica, 1963.

STUWART, James. **Calculus**. 3.ed. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing Company, 1995.

THOMAS, G.B. **Cálculo**. Vol. 1. São Paulo:Addison Wesley, 2002.

Sobre os professores conteudistas

Diva Marília Flemming é doutora em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). É mestre em Matemática Aplicada pela UFSC. É graduada em Matemática pela UFSC. É professora aposentada da UFSC e atualmente é professora e pesquisadora da Universidade do Sul de Santa Catarina (Unisul). No contexto do ensino tem desenvolvido suas atividades na Unisul com alunos dos cursos de Engenharia e de Matemática. É autora de vários livros de cálculo. Como pesquisadora, no Núcleo de Estudos em Educação Matemática (NEEM) dedica-se à Educação Matemática com ênfase nos recursos tecnológicos. Realiza trabalhos interdisciplinares no Mestrado em Educação na Unisul como professora e como orientadora de dissertações. Sua atual paixão profissional está nos desafios da educação a distância, realizando experimentos na formação de professores de Matemática. Atualmente, coordena o primeiro curso de especialização implantado na Unisul na modalidade a distância: Curso em Educação Matemática.

Elisa Flemming Luz é doutora em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), mestre em Engenharia Elétrica e graduada em Engenharia Elétrica, ambos pela UFSC. Atua como professora da Unisul desde 1996 ministrando disciplinas na área da Matemática para os cursos de engenharia. Ministra disciplinas em cursos de especialização presenciais e a distância. É pesquisadora do Núcleo de Estudos em Educação Matemática (NEEM), desenvolvendo atividades de pesquisa na área da Educação Matemática. Atua na educação a distância, no gerenciamento de projetos, como designer instrucional de cursos a distância, autora e tutora de materiais didáticos e atualmente na equipe de capacitação e apoio pedagógico à tutoria.

Christian Wagner é mestre em Física-Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e bacharel em Matemática e Computação Científica pela UFSC. Professor substituto pela UFSC entre 2001 e 2003. Professor horista da Unisul desde 2001. Participação no VII e VIII Seminário de Iniciação Científica realizado na UFSC, com apresentação e publicação. Professor autor do livro Geometria, utilizado no curso de Especialização em Educação Matemática oferecido na modalidade a distância na Unisul. Professor tutor de disciplinas de cursos a distância. Atualmente atua no Núcleo de Estudos em Educação Matemática (NEEM) nas atividades de ensino e extensão voltadas para as dificuldades de aprendizagem da Matemática.

Tabela de Derivadas

Nesta tabela u e v são funções deriváveis de x e c, m e a são constantes.

(1) $y = c \Rightarrow y' = 0$

(2) $y = x \Rightarrow y' = 1$

(3) $y = c \times u \Rightarrow y' = c \times u'$

(4) $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$

(5) $y = u.v \Rightarrow y' = u.v' + v.u'$

(6) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{v.u' - u.v'}{v^2}$

(7) $y = u^m, (m \neq 0) \Rightarrow y' = m.u^{m-1}.u'$

(8) $y = au \Rightarrow y' = a^u \ln a.u'$

(9) $y = e^u \Rightarrow y' = e^u.u'$

(10) $y = \log_a u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u} \log_a e$

(11) $y = \ln u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}$

(12) $y = u^v \Rightarrow y' = v.u^{v-1}.u' + u^v.\ln u.v' \; (u > 0)$

(13) $y = \text{sen } u \Rightarrow y' = \cos u.u'$

(14) $y = \cos u \Rightarrow y' = -\text{sen } u.u'$

(15) $y = \text{tg } u \Rightarrow y' = \sec^2 u.u'$

(16) $y = \text{cotg } u \Rightarrow y' = -\text{cosec}^2 u.u'$

(17) $y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u.\text{tg } u.u'$

(18) $y = \text{cosec } u \Rightarrow y' = \text{cosec } u.\text{cotg } u.u'$

(19) $y = \text{arcsen } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

(20) $y = \arccos u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

(21) $y = \text{arctg } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

(22) $y = \text{arccotg } u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$

(23) $y = \text{arcsec } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$ com $|u| > 1$

(24) $y = \text{arccosec } u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$ com $|u| > 1$

(25) $y = \text{senh } u \Rightarrow y' = \cosh u.u'$

(26) $y = \cosh u \Rightarrow y' = \text{senh } u.u'$

(27) $y = \text{tgh } u \Rightarrow y' = \text{sech}^2 u.u'$

(28) $y = \text{cotgh } u \Rightarrow y' = -\text{cosech}^2 u.u'$

(29) $y = \text{sech } u \Rightarrow y' = -\text{sech } u.\text{tgh } u.u'$

(30) $y = \text{cosech } u \Rightarrow y' = -\text{cosech } u.\text{cotgh } u.u'$

(31) $y = \text{argsenh } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$

(32) $y = \text{arg cosh } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$ com $u > 1$

(33) $y = \text{argtgh } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1-u^2}$ com $|u| < 1$

(34) $y = \text{argcotgh } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1-u^2}$ com $|u| > 1$

(35) $y = \text{arg sech } u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}$ com $0 < u < 1$

(36) $y = \text{argcosech } u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}$ com $u \neq 0$

Anexo para destacar

Tabela de Derivadas

Nesta tabela u e v são funções deriváveis de x e c, m e a são constantes.

(1) $y = c \Rightarrow y' = 0$	(19) $y = \text{arcsen}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
(2) $y = x \Rightarrow y' = 1$	(20) $y = \arccos u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
(3) $y = c \times u \Rightarrow y' = c \times u'$	(21) $y = \text{arctg}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
(4) $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$	(22) $y = \text{arccotg}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$
(5) $y = u.v \Rightarrow y' = u.v' + v.u'$	(23) $y = \text{arc sec}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\|u\|\sqrt{u^2-1}}$ com $\|u\| > 1$
(6) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{v.u' - u.v'}{v^2}$	(24) $y = \text{arccosec}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\|u\|\sqrt{u^2-1}}$ com $\|u\| > 1$
(7) $y = u^m, (m \neq 0) \Rightarrow y' = m.u^{m-1}.u'$	(25) $y = \text{senh}\, u \Rightarrow y' = \cosh u.u'$
(8) $y = au \Rightarrow y' = a^u \ln a.u'$	(26) $y = \cosh u \Rightarrow y' = \text{senh}\, u.u'$
(9) $y = e^u \Rightarrow y' = e^u.u'$	(27) $y = \text{tgh}\, u \Rightarrow y' = \text{sech}^2\, u.u'$
(10) $y = \log_a u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}\log_a e$	(28) $y = \text{cotgh}\, u \Rightarrow y' = -\text{cosech}^2\, u.u'$
(11) $y = \ln u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}$	(29) $y = \text{sech}\, u \Rightarrow y' = -\text{sech}\, u.\text{tgh}\, u.u'$
(12) $y = u^v \Rightarrow y' = v.u^{v-1}.u' + u^v.\ln u.v'\ (u > 0)$	(30) $y = \text{cosech}\, u \Rightarrow y' = -\text{cosech}\, u.\text{cotgh}\, u.u'$
(13) $y = \text{sen}\, u \Rightarrow y' = \cos u.u'$	(31) $y = \text{argsenh}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$
(14) $y = \cos u \Rightarrow y' = -\text{sen}\, u.u'$	(32) $y = \text{arg cosh}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$ com $u > 1$
(15) $y = \text{tg}\, u \Rightarrow y' = \sec^2 u.u'$	(33) $y = \text{argtgh}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1-u^2}$ com $\|u\| < 1$
(16) $y = \text{cotg}\, u \Rightarrow y' = -\text{cosec}^2\, u.u'$	(34) $y = \text{argcotgh}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1-u^2}$ com $\|u\| > 1$
(17) $y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u.\text{tg}\, u.u'$	(35) $y = \text{arg sech}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}$ com $0 < u < 1$
(18) $y = \text{cosec}\, u \Rightarrow y' = \text{cosec}\, u.\text{cotg}\, u.u'$	(36) $y = \text{argcosech}\, u \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}$ com $u \neq 0$